

Аналитична геометрия (лекции)

03.10.2018

Релации на еквивалентност

Опр. Нека X е множество. (Двуместна) релация R в X означава, че за $\forall x, y \in X$ е казано дали са в релация или не. Ако са в релация, ще пишем $x R y$.

Пр. 1 Равенството ($x = y$) е релация

Пр. 2 Нека $f: X \rightarrow X$. Тя деф. релация $R_f: x R_f y \Leftrightarrow y = f(x)$

Пр. 3 $\leq$ в $\mathbb{R}$

Пр. 4 Упоредност на прави ($a \parallel b$)

Опр. Релацията $\sim$ се нарича релация на еквивалентност, ако

1) $\forall x \in X: x \sim x$ (рефлексивност)

2) $\forall x, y \in X$ ако $x \sim y$, то $y \sim x$ (симетричност)

3) $\forall x, y, z \in X$ ако $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$ (транзитивност)

Заб. Примери 1 и 4 ако считаме, че права е упоредна на себе си. са релации на еквивалентност

2 е рел. на екв. $\Leftrightarrow f$ е идентитет

Опр. Нека $\sim$ е рел. на еквив. в X и $x \in X$. Клас на еквивалентност на x се нарича множеството $[x] := \{y \in X: x \sim y\}$.

Тв. 1 Нека $\sim$ е рел. на еквив. в X . Тогава:

1) $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$

2) Ако $x \not\sim y \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$. В частност, X се разбива на непересичащи се множества - класове на еквивалентност.

Доказ. $(\Rightarrow)$ Нека $x \sim y$. Нека $z \in [x]$. $\Rightarrow x \sim z \stackrel{(\text{сим.})}{\Rightarrow} z \sim x \Rightarrow$ имаме $z \sim x$ и $x \sim y \stackrel{(\text{транз.})}{\Rightarrow} z \sim y \Rightarrow y \sim z \Rightarrow z \in [y] \Rightarrow [x] \subseteq [y]$.

Аналогично $[y] \subseteq [x] \Rightarrow [x] = [y]$

$(\Leftarrow)$ Нека $[x] = [y]$. Имаме $y \sim y \stackrel{(\text{рефл.})}{\Rightarrow} y \in [y] \Rightarrow y \in [x] \Rightarrow x \sim y$

2) Нека $x \not\sim y$. Да допуснем, че $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Нека $z \in [x] \cap [y] \Rightarrow z \in [x] \Rightarrow x \sim z$. Аналогично $y \sim z \Rightarrow z \sim y \stackrel{(\text{транз.})}{\Rightarrow} x \sim y$. Противоречие. $\square$

Заб. $\{x\} = \{y \in X : x \in y\} = \{x\}$ - пр. 1

$\{a\} \cap \{b\} = \{x \in X : x \in a \cap b\}$ - пр. 4. Класовото на съвместимост
относно тази релация се нарича направление.

1. Вектори

Опр. Отворена отсечка с краища t, A и t, B се нарича
множеството на всички точки, които са между A и B

Опр. Затворена отсечка с краища A и B е множеството,
състоящо се от t, A и t, B и точките на отворената отсечка
с краища A и B .

Заб. Ако в деф. $A=B$, то отв. отс. $AA = \emptyset$, а затв. отс. $AA = \{A\}$.
Такава отсечка се нарича пункт.

Заб. Накратко ще казваме отсечка вместо затворена отсечка

Опр. Нека ℓ е права и $P \in \ell$. Тогава $\ell \setminus \{P\}$ се разпада на
две непресичащи се подмножества, като t, A и t, B са от разл.
подмножества $\Leftrightarrow P$ е между A и B . (т.е. $P \in$ отв. отс. AB).

Тези подмножества се наричат отворени лъчи с начало P .

Затворен лъч с начало P е множеството, състоящо се
от t, P и отв. лъч с начало P . Накратко ще казваме лъч
вместо затворен лъч. Двата лъча с начало една и съща
точка се наричат противоположни.

Заб. Ако γ е лъч с начало P и $A \in \gamma$, $A \neq P$, то $\text{отн. } \gamma \text{ с } PA$.

Опр. Нека ℓ е права в равнината π (съотв. π е напълнена
в пространството A_3). Тогава $\pi \setminus \ell$ (съотв. $A_3 \setminus \pi$) се разпада на
две непресичащи се подмножества, като две точки $A, B \in \pi \setminus \ell$
($A, B \in A_3 \setminus \pi$) са от различни подмножества $\Leftrightarrow$ отв. отсечка AB
пресича ℓ (π).

Тези подмножества се наричат отв. напълнени с които π_2
е съотв. отв. напространства с които π_1

Затворена нацравнина с контур ℓ (соотв. затв. нацур. с контур ℓ) е множество, състоящо се от точките на ℓ (ℓ) и точките на отв. нацравнина с контур ℓ (отв. нацур. с контур ℓ).

За краткост ще пишем нацравнина и нацуространство вместо затв. нацравнина и затв. нацуространство.

Опр. Казваме, че лъчите a и b са еднопосочни и пишем $a \uparrow b$, ако правите, върху които лежат a и b са упоредни (считаме, че всяка права е упоредна на себе си), и ¹⁾ ако правите съвпадат, то $a \uparrow b$ и $b \uparrow a$.

²⁾ Ако правите са различни, и A и B са началата на a и b , то a и b са в една и съща нацравнина ^{отн.} ~~отн.~~ правата AB в равнината, определена от a и b .

Казваме, че a и b са противопосочни и пишем $a \downarrow b$, ако правите на a и b са упоредни, но a и b не са еднопосочни.

Тв. 1 Еднопосочността на лъчи е рефлексивна на еквивалентност в множеството на всички лъчи.

Д-во Рефлексивността и симетричността са очевидни. Транзитивността има дълго доказателство и ще я вземем на доверие.

Заб. Класовете на еквивалентност отн. еднопосочността на лъчи се наричат посоки.

Опр. Казваме, че отсечките AB и CD са еднакви и пишем $AB \cong CD$, ако при дадена единична отсечка за измерване $|AB| = |CD|$.

Коректност: Ако имаме друга единична отсечка и спрямо нея отн. дължините $|AB|$, тогава $|AB| = c \cdot |AB|$ и $c > 0$ е конст., независеща от отсечката (c е дължината на първата единична отсечка спрямо втората).

Д-во $|AB| = |CD| \Leftrightarrow \|AB\| = \|CD\|$
 $\|AB\| = \|CD\|$

$\Rightarrow$ деф. е коректна.

Тв. 2 Еднаквостта на отсечки е релация на еквивалентност в множеството на всички отсечки.

Д-во

1) $|AB| = |AB| \Rightarrow AB \cong AB$

2) $|AB| = |CD| \Rightarrow |CD| = |AB|$



$AB \cong CD \Rightarrow CD \cong AB$

3) $|AB| = |CD|, |CD| = |EF| \Rightarrow |AB| = |EF|$



$AB \cong CD, CD \cong EF \Rightarrow AB \cong EF$

□

Опр. Насочена отсечка или свързан вектор с начало т. А и край т. В се нарича отсечката АВ, на която единият край е избран за първи, а другия - втори. Озн. се с $\vec{AB}$.
 Ако $A=B$, то насочената отсечка се нарича нулева.

Заб. Ако $A \neq B$, то отс. АВ и отс. ВА са едни и същи, но $\vec{AB}$ и $\vec{BA}$ са различни.



Опр. Казваме, че насочените отсечки $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ са еднопосочни и пишем $\vec{AB} \uparrow \vec{CD}$, ако е изпълнено едно от условията:
 1) поне една от отсечките е нулева
 2) ако $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ са ненулеви, то лъчите $AB \rightarrow \uparrow CD \rightarrow$.

Тв. 3 Еднопосочността на насочени отсечки е релация на екв. в множеството на ненулевите насочени отсечки.

Д-во Той като разглеждаме само нулевите отсечки, твърдението следва директно от Тв.1 □

Заб. Нулевите отсечки влияят ~~существенно~~ на транзитивността на релацията и затова ги изключваме.

Опр. Казваме, че насочените отсечки $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ са равни и пишем $\vec{AB} = \vec{CD}$, ако $\vec{AB} \uparrow \uparrow \vec{CD}$ и отс. $AB \cong$ отс. CD .

Тв.4 Равенството на насочени отсечки е релация на еквив. в множеството на всички насочени отсечки

10.10.2018

2-во Дефи. и симетричността е тривиално следствие от рефл. и сим. на $\uparrow\uparrow$ и $\cong$.

Транзитивност: Нека $\vec{AB} = \vec{CD}$ и $\vec{CD} = \vec{EF}$. Ако трите отсечки са ненулеви, транзитивността следва от транз. на $\uparrow\uparrow$ за ненулеви отс. и транз. на $\cong$.

Нека някоя от $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ или $\vec{EF}$ е нулева.

Ако $\vec{AB}$ е нулева $\Rightarrow A=B$. От $\vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow 0 = |AB| = |CD| \Rightarrow C=D \Rightarrow \vec{CD}$ е нулева. От $\vec{CD} = \vec{EF}$ аналогично следва, че $\vec{EF}$ е нулева.

$\Rightarrow \vec{AB}$ и $\vec{EF}$ са нулеви $\Rightarrow \vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{EF}$ и $|AB|=0=|EF| \Rightarrow \vec{AB} = \vec{EF}$.

Ако $\vec{CD}$ е нулева или $\vec{EF}$ е нулева. $\underbrace{|AB|=0=|EF|}_{\text{т.е. } AB \cong CD}$ $\Rightarrow \vec{AB} = \vec{EF}$ аналогично.

$\Rightarrow$ равенството на насочени отсечки е релация на еквивалентност

Тв. 5 (св-во на успоредника) $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{BD}$

Доказ. Достатъчно е да се докаже само правата посока, т.е.

$\vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{BD}$, защото ако в последното твърждение разменим B и C , получаваме обратната посока.

1) $\vec{AB}$ е нулева, т.е. $A=B \Rightarrow$ и $\vec{CD}$ е нулева, т.е. $C=D$. (от $0 = |AB| = |CD|$).

Тогаво $\vec{AC} = \vec{BD} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{AC}$. Но посмехното е вярно.

2) $\vec{AB}$ е ненулева, т.е. $A \neq B \Rightarrow$ и $\vec{CD}$ е ненулева, т.е. $C \neq D$. (ако $\vec{CD}$ е нулева, то и $\vec{AB}$ е нулева). $\Rightarrow \vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$, т.е. $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$

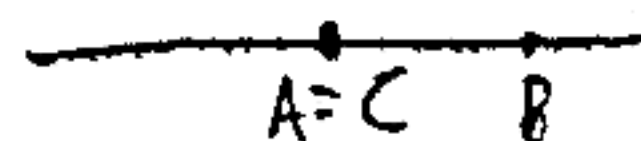
(а) AB и CD са върху една права $\Rightarrow \vec{AB} \geq \vec{CD}$ или $\vec{CD} \geq \vec{AB}$.
Нека за определеност $\vec{AB} \geq \vec{CD}$

(а1) Нека $A=C$.

$\therefore \vec{AB} \geq \vec{CD} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{CD}$.

Д: $|CD| = |AB|$, $D \in \vec{CD} = \vec{AB} \Rightarrow D=B$

Той като $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$ са нулеви, то $\vec{AC} = \vec{BD}$

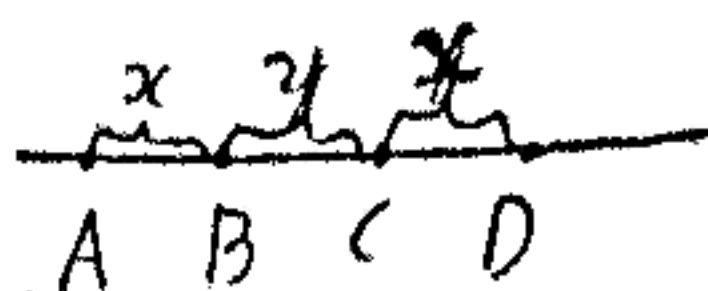


(a2) $A \neq C$

$$x := |AB| = |CD|$$

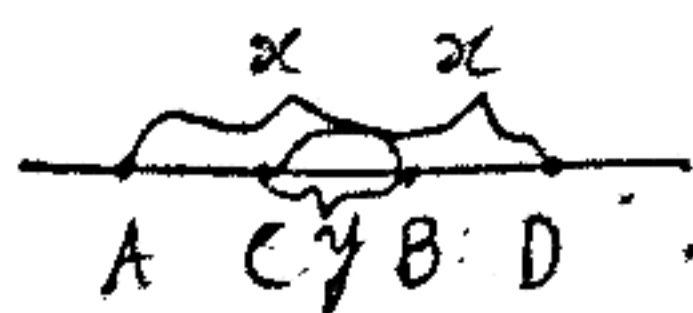
$$y := |BC|$$

случай 1



$$|AC| = x + y = |BD|$$

случай 2



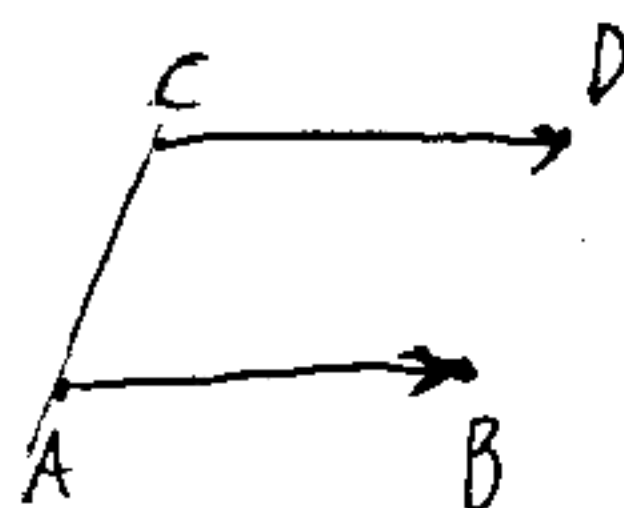
$$|AC| = x - y = |BD|$$

$\Rightarrow$ и в двата случая $|AC| = |BD|$ и също така $\vec{AC} \parallel \vec{BD}$, т.е. $\vec{AC} \parallel \vec{BD}$

(d) Мека AB и CD са върху различни прави.

$$\vec{AB} \parallel \vec{CD} \Rightarrow AB \parallel CD \text{ и } B \text{ и } D$$

са в една и съща полуравнина
относно AC . Също $|AB| = |CD|$



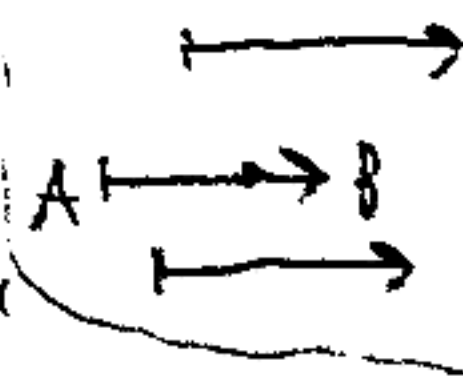
$\Rightarrow ABCD$ е успоредник. $\Rightarrow |AC| = |BD|$ и $AC \parallel BD$ и C и D

са в една и съща полуравнина отн. $\vec{AB}$. $\Rightarrow \vec{AC} \parallel \vec{BD}$

$$\Rightarrow \vec{AC} \parallel \vec{BD} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{BD}$$

Опр. Класовете на еквив. отн. релацията равенство на насочени отсечки се наричат свободни вектори. Ако v е свободен вектор и $v = [\vec{AB}]$, то казваме, че $\vec{AB}$ е представител на v и пишем $\vec{AB} = v$ (вместо $\vec{AB} \in v$). □

Т-ма 1 Нулевите насочени отсечки образуват един клас на еквивалентност, т.е. един свободен вектор. Този свободен вектор се нарича нулев и се означава с $\vec{0}$.

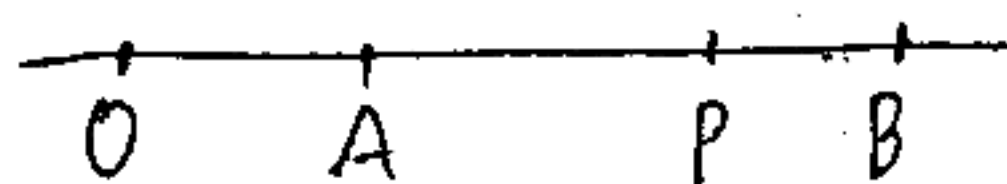
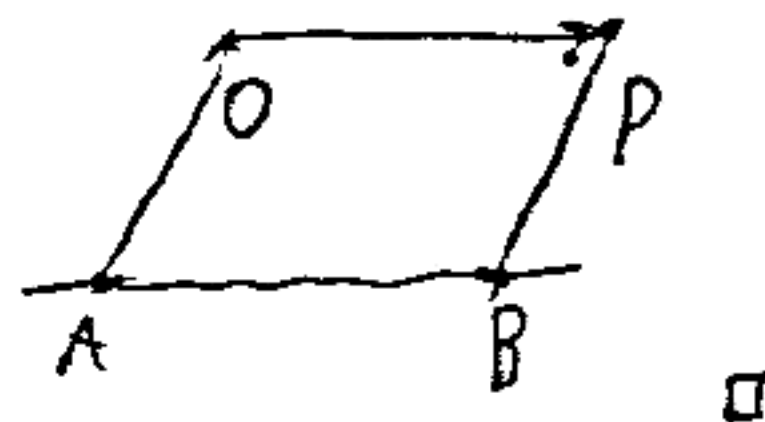


Д-во Видели сме, че всеки две нулеви насочени отсечки са равни. $\Rightarrow$ всички нулеви насочени отсечки са в един клас на еквивалентност. Ако $\vec{AB}$ е от този клас, то тя също е нулева, защото виждаме (в док. на тв. 4), че ако насочена отсечка е равна на нулева, то тя също е нулева □ 7

Тема 2 Нека O е точка и v е свободен вектор. Тогава
 $\exists! P: \vec{OP} = v$.

Д-во

Ако v е нулев, то $P=O$ е единствената точка, която върши работата. Нека сепи $v \neq \vec{0}$ и $\vec{AB} = v \Rightarrow A \neq B \Rightarrow A$ и B задават права AB . Ако O не е върху правата AB , то P е единствената точка, за която $ABPO$ е успоредник. Ако O е върху правата AB , пак $\exists! P: \vec{OP} = \vec{AB}$



Заб.

Отгук нататък ще казваме вектор вместо свободен вектор.

2. Линейни операции с вектори

Опр. Нека u е вектор и $\vec{AB}$ е представител на u .

Векторът с представител $\vec{BA}$ се нарича противоположен u и се означава с $-u$.

Коректност (независимост от избора на представителя $\vec{AB}$ на u) Нека $\vec{CD}$ също е представител на u .

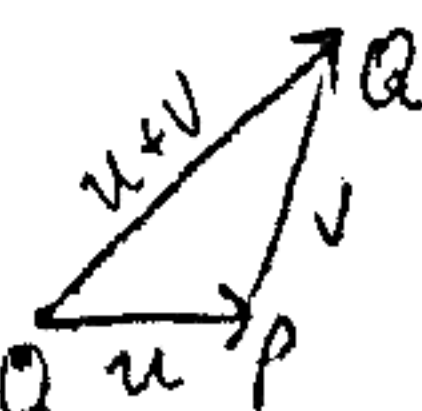
$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{BD} \Rightarrow \vec{BD} = \vec{AC} \Rightarrow \vec{BA} = \vec{DC} \Rightarrow \vec{BA}$ и $\vec{DC}$ са представители на един и същ вектор $\Rightarrow$ определението е коректно. $\square$

Пр. 1 ~~Нека~~ Нека O е произволна точка $\Rightarrow \vec{OO} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OO} = -\vec{0} \Rightarrow \vec{0} = -\vec{0}$

Опр. (собиране на вектори) Нека u и v са вектори, O - произв. точка, т. $P: \vec{OP} = u$ и т. $Q: \vec{PQ} = v$. Тогава векторът с представител $\vec{OQ}$ се нарича сбор (или сума) на u и v и се означава с $u+v$.

Коректност (независимост от избора на т. O).

Нека O' е друга точка, $P': \vec{O'P'} = u$ и $Q' = O'A' = v$. O и P



имаме $\vec{OP} = \vec{O'P'} \stackrel{(\text{т.с.})}{\Rightarrow} \vec{OO'} = \vec{PP'}$
 $\vec{PQ} = \vec{P'Q'} \stackrel{(\text{т.с.})}{\Rightarrow} \vec{PP'} = \vec{QQ'}$

$\Rightarrow \vec{OO'} = \vec{QQ'} \stackrel{(\text{т.с.})}{\Rightarrow} \vec{OQ} = \vec{O'Q'}$

$\Rightarrow \vec{OQ}$ и $\vec{O'Q'}$ са представител на един и същ вектор $\square$

Т-ма 1 Свойството на вектори има следните основни свойства:

(1) $u + v = v + u$ (коммутативност)

(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (асоциативност)

(3) $u + \vec{0} = u$

(4) $u + (-u) = \vec{0}$

Сл. 1 Сумата на k вектора $u_1, \dots, u_k$ не зависи нито от това как са поставени скоби, нито от реда на векторите. Затова обикновено не се пишат скоби, т.е. пишем $u_1 + \dots + u_k$ или $\sum_{i=1}^k u_i$

Опр. (изваждане на вектори) Разлика на векторите u и v се нарича векторът $u + (-v)$. Изнасява се с $u - v$.

Опр. (умножение на вектор с число)

Произведение на числото $\lambda \in \mathbb{R}$ и векторът u се нарича векторът v , деф. по следния начин:

(a) ако $\lambda = 0$ или $u = \vec{0}$, то $v = \vec{0}$

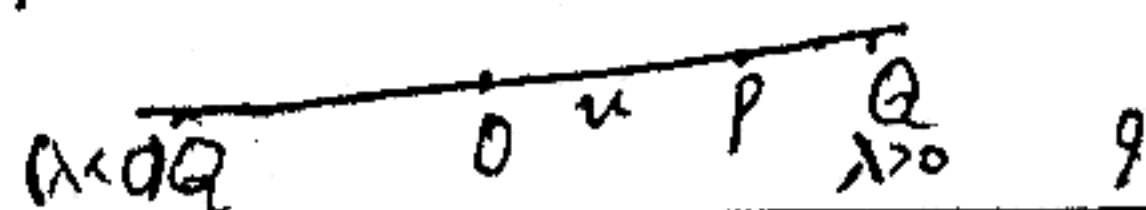
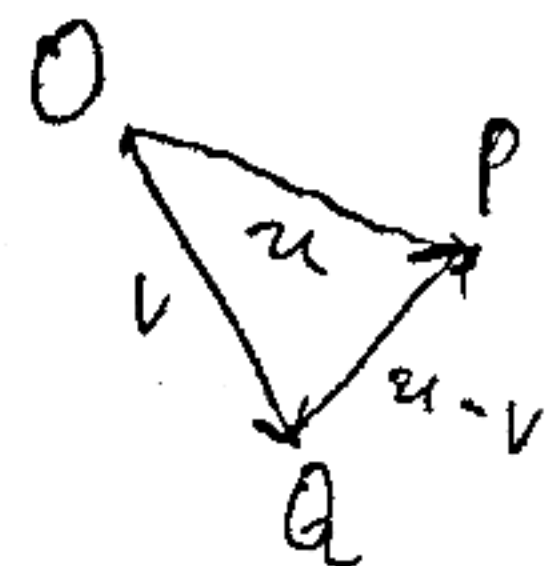
(b) ако $\lambda \neq 0$ и $u \neq \vec{0}$, то:

Нека O е произволна точка, $P: \vec{OP} = u$ ($\Rightarrow O \neq P$).

Нека Q е единствената точка върху правата $OP: |OQ| = |\lambda| |OP|$.

при дадена единична отсечка за измерване и $\vec{OQ} \uparrow \vec{OP}$

при $\lambda > 0$ и $\vec{OQ} \uparrow \vec{OP}$ при $\lambda < 0$. Тогава v е векторът с представител $\vec{OQ}$. v се означава с λu .



Коректност:

1) независимост от единичната отсечка:

Ако вземем друга единична отсечка и означаваме стрелно нея дължините с $\|AB\|$, $\Rightarrow \exists c > 0: \|AB\| = c|AB|$ за всички отсечки AB . Тогава $\|OA\| = c \cdot |OA| = c|\lambda| |OP| = |\lambda| c |OP| = |\lambda| \|OP\| \Rightarrow$ т. A и c същата и при друга единична отсечка.

$\Rightarrow$ имаме независимост от избора на единична отсечка.

2) независимост от избора на O :

Нека O' е друга точка, $P': O'P' = u$.

Q' е върху правата $O'P'$:

$$|O'Q'| = |\lambda| |O'P'| \text{ и } \begin{matrix} \vec{O'Q'} \uparrow \uparrow \vec{O'P'} & \text{при } \lambda > 0 \\ \vec{O'Q'} \uparrow \downarrow \vec{O'P'} & \text{при } \lambda < 0 \end{matrix}$$

$$\vec{OQ} \stackrel{?}{=} \vec{O'Q'}$$

$\vec{OP}$ и $\vec{O'P'}$ са представители на $u \Rightarrow \vec{OP} = \vec{O'P'} \Rightarrow |OP| = |O'P'|$ и $\vec{OP} \uparrow \uparrow \vec{O'P'}$

$$|O'Q'| = |\lambda| |O'P'| = |\lambda| |OP| = |OQ|$$

При $\lambda > 0$: $\vec{O'Q'} \uparrow \uparrow \vec{O'P'}$, $\vec{O'P'} \uparrow \uparrow \vec{OP}$, $\vec{OQ} \uparrow \uparrow \vec{OP} \Rightarrow \vec{O'Q'} \uparrow \uparrow \vec{OQ}$

При $\lambda < 0$: $\vec{O'Q'} \uparrow \downarrow \vec{O'P'}$, $\vec{O'P'} \uparrow \uparrow \vec{OP} \Rightarrow \vec{OQ} \uparrow \downarrow \vec{OP}$

$$\text{Но и } \vec{OQ} \uparrow \downarrow \vec{OP} \Rightarrow \vec{O'Q'} \uparrow \uparrow \vec{OQ}$$

$\Rightarrow$ и в двата случая $|O'Q'| = |OQ|$ и $\vec{O'Q'} \uparrow \uparrow \vec{OQ}$

$\Rightarrow \vec{O'Q'} = \vec{OQ}$ са представители на един и същ вектор, т.е. деф. на λu не зависи от избора на O . $\square$

Т-ма 2 Умножението на вектор с число има следните (основни) свойства:

(5) $1 \cdot u = u$

(6) $\lambda(\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и u е вектор (асоциативност)

$$\begin{aligned} (7) \quad (\lambda + \mu)u &= \lambda u + \mu u \\ (8) \quad \lambda(u + v) &= \lambda u + \lambda v \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (7) \quad (\lambda + \mu)u &= \lambda u + \mu u \\ (8) \quad \lambda(u + v) &= \lambda u + \lambda v \end{aligned}} \right\} \text{ (дистрибутивност)}$$

Опр. Линейно (векторно) пространство над $\mathbb{R}$ е множество V , в което са дефинирани две операции:

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(u, v) \mapsto u + v,$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

които имат своите свойства (1)-(8) от Т-ма 1 и Т-ма 2.

(по-точно, (3) трябва да се замени с $\exists \vec{0} \in V : u + \vec{0} = u \quad \forall u \in V$
и (4) трябва да се замени с $\forall u \in V \exists (-u) \in V : u + (-u) = \vec{0}$)

Тпр. 2 $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) = x : x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n\}$

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$$\vec{0} := (0, \dots, 0)$$

$$-x := (-x_1, \dots, -x_n)$$

Т-ма 3 С введените операции събиране на вектори и умножение на вектор с число, векторите в пространството (а и в равнина и върху права) образуват реално линейно пространство

Д-во: следва от Т-ма 1 и Т-ма 2 □

Тв. 1 Събирането на вектори и умножението на вектор с число имат още своите свойства:

$$(1) \quad -\vec{0} = \vec{0}$$

$$(2) \quad -(-u) = u$$

$$(3) \quad \text{Ако } u + w = v + w, \text{ то } u = v$$

$$(4) \quad -(u + v) = -u - v$$

$$(5) \quad 0 \cdot u = \vec{0}$$

$$(6) \quad \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$(7) \quad \text{Ако } \lambda \cdot u = \vec{0}, \text{ то } \lambda = 0 \text{ или } u = \vec{0}$$

$$(8) \quad \text{Ако } \lambda u = \lambda v \text{ и } \lambda \neq 0, \text{ то } u = v$$

(9) Ако $\lambda \cdot u = \mu \cdot u$ и $u \neq 0$, то $\lambda = \mu$

(10) $(-1) \cdot u = -u$

(11) $(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda u - \mu u$

(12) $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$

Тези свойства важат във всяко линейно пространство
Д-во своите следват непосредствено от аксиомите за
линейно пространство $\square$

Д-во (ка т-ма 1)

(1) $v + u = u + v$

O - произв.

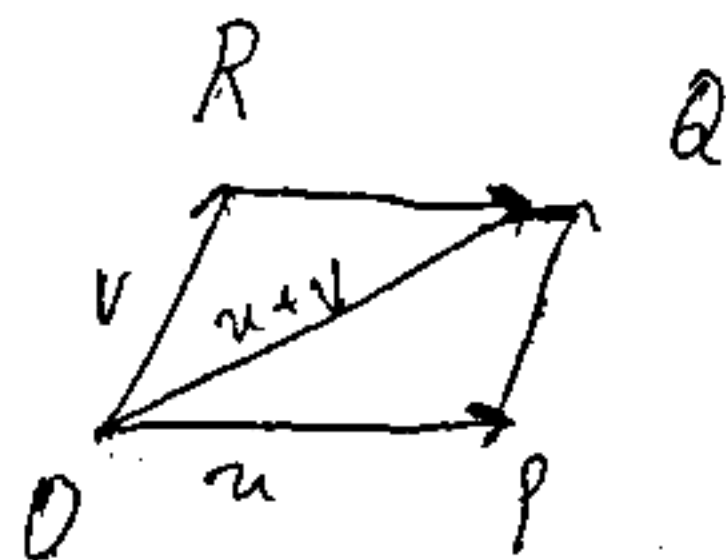
$P: \vec{OP} = u$ и $Q: \vec{PQ} = v$

$\Rightarrow \vec{OQ} = u + v$

$R: \vec{OR} = v$

$\Rightarrow \vec{OR} = \vec{PQ} \Rightarrow \vec{OP} = \vec{RQ} \Rightarrow \vec{RQ} = u \Rightarrow \vec{OR} = v, \vec{RQ} = u \Rightarrow \vec{OQ} = v + u$

$\Rightarrow v + u = u + v$



(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$

O - произволна точка

$P: \vec{OP} = u$

$Q: \vec{PQ} = v$

$\Rightarrow \vec{OQ} = u + v$

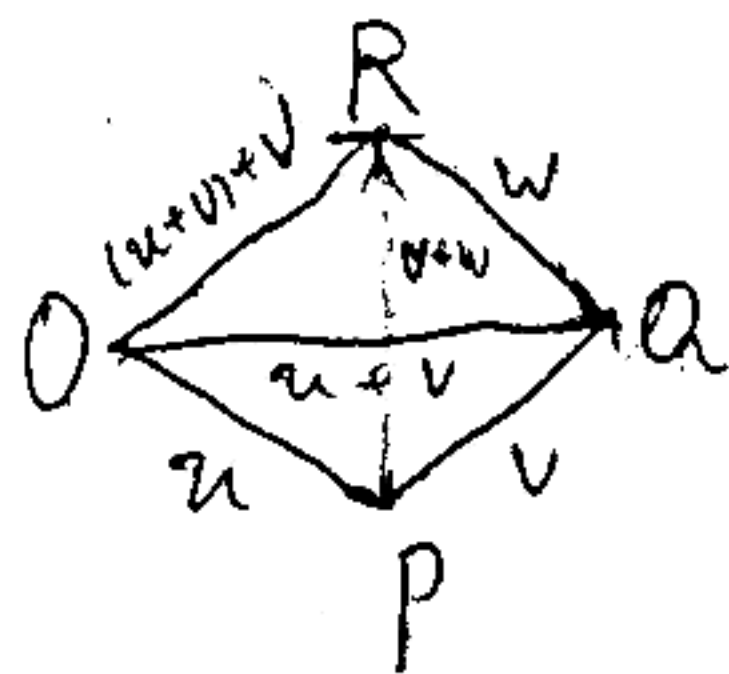
$R: \vec{QR} = w$

$\Rightarrow \vec{OR} = (u + v) + w$

$\vec{PQ} = v, \vec{QR} = w \Rightarrow \vec{PR} = v + w \Rightarrow$ имаме $\vec{OP} = u, \vec{PR} = v + w$

$\Rightarrow \vec{OR} = u + (v + w)$

$\Rightarrow (u + v) + w = u + (v + w)$



$$(3) u + \vec{0} = u$$

0-произв. и $P: \vec{OP} = u$

$$\vec{PP} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{OP} = \vec{OP} + \vec{PP}$$

$$\overset{u}{u} = \overset{u}{u} + \overset{\vec{0}}{\vec{0}}$$

$$(4) u + (-u) = \vec{0}$$

0-произв. и $P: \vec{OP} = u$

$$\Rightarrow \vec{PO} = -u \Rightarrow \vec{OO} = \vec{OP} + \vec{PO}$$

$$\overset{\vec{0}}{\vec{0}} = \overset{u}{u} + \overset{(-u)}{(-u)}$$

Лемма 2

$$(5) 1 \cdot u = u$$

Ако $u = \vec{0}$, то $1 \cdot u = \vec{0}$ и $\Rightarrow 1 \cdot u = u$

Ако $u \neq \vec{0}$, 0-произв. и $\vec{OP} = u$

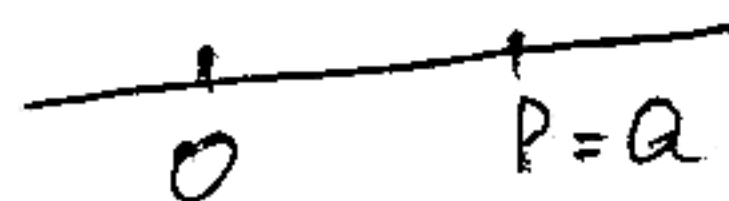
$$Q: |OQ| = |1| \cdot |OP| = |OP|$$

и $\vec{OQ} \uparrow \uparrow \vec{OP}$, так как $1 > 0$

$$\Rightarrow P = Q \text{ и } \vec{OQ} = \vec{OP}$$

$$\overset{1 \cdot u}{1 \cdot u} = \overset{u}{u}$$

Остальные три свойства - на упражнение



17.10.2018 Отношение по ЛА:

V-линейно пр-во

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

↓ линейная комбинация на $v_1, \dots, v_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

опр. $v_1, \dots, v_k$ са линейно зависимы, ако $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \vec{0}$ за някои $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, поне едно от които $\neq 0$.

Тв.1 $v_1, \dots, v_k$ са линейно независими $\Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ само при $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

Тв.2 Ако към линейно независимы вектори добавим каквито и да е вектори, то пак се получават линейно зависимы вектори

Тв.3 Ако от линейно независимы вектори махнем някои вектори, то останалите пак са линейно независими

Тв.4 Един вектор е линейно зависим $\Leftrightarrow$ е $\vec{0}$ и е линейно независим $\Leftrightarrow \neq \vec{0}$.

Сл.1 Ако някой от $v_1, \dots, v_k$ е $\vec{0}$, то те са линейно зависимы

Тв.5 Ако $k > 1$, то $v_1, \dots, v_k$ са линейно зависимы $\Leftrightarrow$ някой от тях е линейна комбинация на останалите.

Д-во Ако са линейно зав.:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \vec{0}$$

$$\text{Когато } \lambda_k \neq 0 \Rightarrow v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} v_{k-1}$$

Обратно: ако $v_k = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1}$

$$\Rightarrow \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1} + v_k = \vec{0} \Rightarrow \text{са линейно зав.}$$

Тв.6 Нека $v_1, \dots, v_k$ са линейно независими. Тогава $u, v_1, \dots, v_k$ са линейно зависимы $\Leftrightarrow u$ е линейна комбинация на $v_1, \dots, v_k$.

Д-во ($\Leftarrow$) като в предишното тв.

($\Rightarrow$) $\lambda_0 u + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \vec{0}$, където поне едно от $\lambda_0, \dots, \lambda_k \neq 0$.

Ако $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \vec{0}$ и $v_1, \dots, v_k$ са линейно независими. $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Противоречие.

$$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow u = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} v_1 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} v_k$$

Тв. 7 Ако един вектор се представя като лн. комбинация на лн. независими вектори, това представяне е единствено (т.е. коефициентите са единствени).

Д-во $V_1, \dots, V_k$ - лн. незав.

$$u = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_k V_k = \mu_1 V_1 + \dots + \mu_k V_k$$

$$\Rightarrow \vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1) V_1 + \dots + (\lambda_k - \mu_k) V_k$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \dots = \lambda_k - \mu_k = 0$$

□

Опр. Казваме, че лн. пр. V е n -мерно, ако във $V \exists n$ лн. независими вектора, но всеки $n+1$ вектора са лн. зависими.

Пр. 1 $\mathbb{R}^n$ е n -мерно

$e_i = (0 \dots 1 \dots 0)^T$, $i=1, \dots, n$ са лн. независими, понеже i -та позиция

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^T = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_i = 0, i=1, \dots, n$$

Втората част (че всеки $n+1$ вектора са лн. зав. в $\mathbb{R}^n$) се доказва в курса по ЛА.

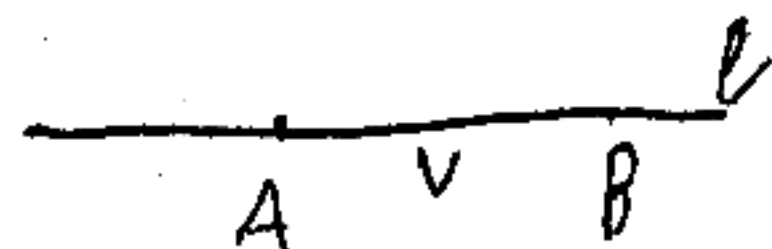
3. Колinearност и компланарност на вектори

Опр. Казваме, че векторът v е коlinearен с правата ℓ и пишем $v \parallel \ell$, ако v има представител $\vec{v}$ ху ℓ .

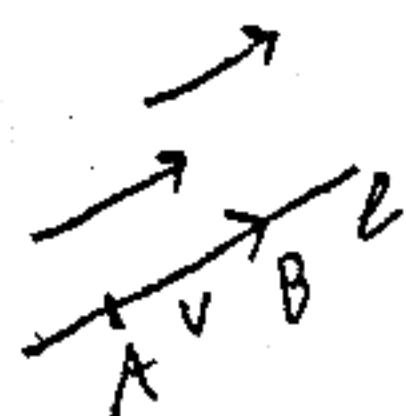
Еквивалентна дефиниция е всеки представител на v да е върху права, която е успоредна на ℓ .

Опр. Казваме, че векторите $v_1, \dots, v_n$ са коlinearни, ако $\exists$ права ℓ , за която всеки от тях е коlinearен с ℓ . Трим два вектора пишем $v_1 \parallel v_2$.

Пр. 1 $\vec{0} \parallel v$ за всеки вектор v



$\vec{AA}$ - върху същата права



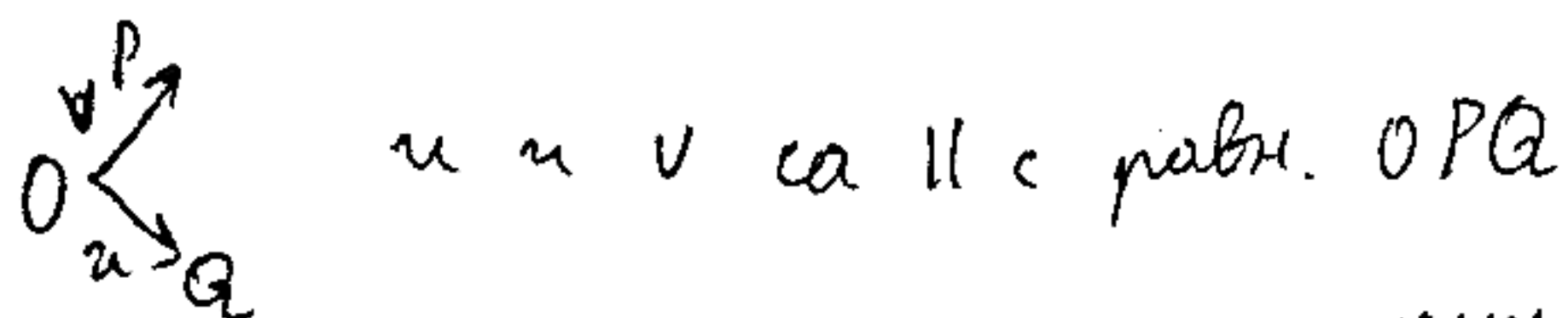
Опр. Казваме, че векторът V е копланарен с равнината π и пишем $V \parallel \pi$, ако V има представител, върху π .

Еквивалентна дефиниция е всеки представител на V да е върху права, която е успоредна на π .

Опр. Казваме, че векторите $V_1, \dots, V_n$ са копланарни, ако $\exists$ равн. π , с която всеки от тях е копланарен.

Лем. 2

1) Всеки два вектора са копланарни



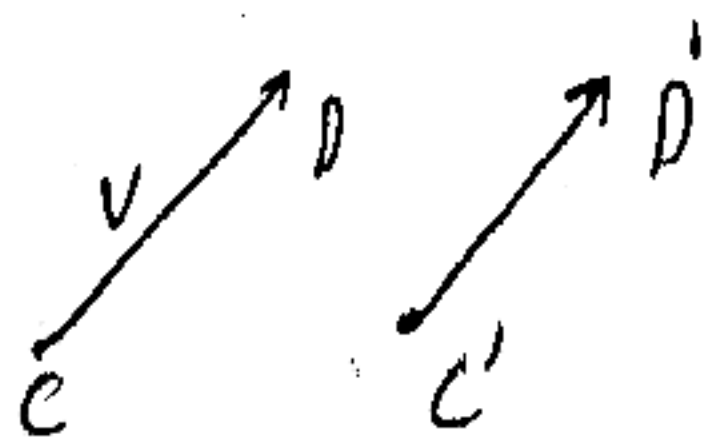
2) Ако $u \parallel v$, то те са и копланарни ~~копланарни~~

Опр. Казваме, че векторите u и v са еднородни и пишем $u \uparrow \uparrow v$, ако имат представители, които са еднородни насочени отсечки.

Еквив. е да се каже, че всеки представител на u е еднороден с всеки представител на v .

Коректност:

Очевидно:
(от транзитивността на $\uparrow \uparrow$ за насочени отсечки)



Ако $\vec{AB} \uparrow \uparrow \vec{CD}$, то от $\vec{AB} \uparrow \uparrow \vec{A'B'}$ (представител на u) и $\vec{CD} \uparrow \uparrow \vec{C'D'}$ (представител на v)

$\Rightarrow \vec{A'B'} \uparrow \uparrow \vec{C'D'}$

□

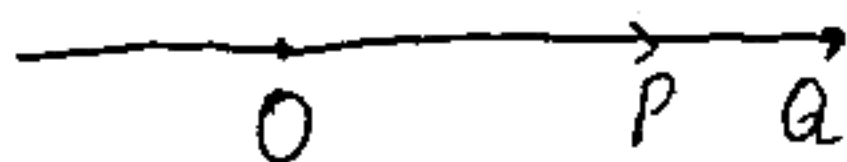
Опр. Нека е фиксирана единична отсечка за измерване на дължини. Дължината на вектор v се нарича дължината на произволен негов представител.

Коректност Ако $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ са представители на v , то $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$.

Т-ма 1 Нека u и v са вектори и $u \neq \vec{0}$. Тогава u и v са коллинеарни $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : v = \lambda u$. Числото λ в това равенство е единствено

Д-во

Нека $v = \lambda u \Rightarrow u \parallel v$ от деф. на колл. на вектор и число.
 $\uparrow$ ($\Leftarrow$)



2) (Единственост)

1 начин $u \neq \vec{0} \Rightarrow u$ е лин. независим $\Rightarrow$ ако $v = \lambda u$, т.е. v е лин. комб. на u , то това може да се направи по единствен начин (от $|\lambda|$, т.е. коеф. λ е единствен

2 начин Ако $v = \vec{0}$, то $\lambda = 0$ (защото $u \neq \vec{0}$)

Ако $v \neq \vec{0}$, то $|v| = |\lambda| |u| \Rightarrow |\lambda| = \frac{|v|}{|u|}$

$$\Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0, & \text{ако } v = \vec{0} \\ \frac{|v|}{|u|}, & \text{ако } v \neq \vec{0} \text{ и } v \uparrow \uparrow u \\ -\frac{|v|}{|u|}, & \text{ако } v \neq \vec{0} \text{ и } v \uparrow \downarrow u \end{cases} \quad (1)$$

$\Rightarrow \lambda$ е едн. определено от u и v и с. λ е единствено.

3) ($\Rightarrow$) Нека $u \parallel v$. Деф. λ с ф-лата (1). Ако $v = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$ и $\vec{0} = v = 0 \cdot u = \lambda u$

Нека $v \neq \vec{0}$. Тогава за λu имаме

$$|\lambda u| = |\lambda| |u| = \frac{|v|}{|u|} |u| = |v|$$

При $v \uparrow \uparrow u$ следва, че $\lambda > 0$ и от деф. на умн. на вектор с число $\Rightarrow \lambda u \uparrow \uparrow u \Rightarrow \lambda u \uparrow \uparrow v$

При $v \uparrow \downarrow u \Rightarrow \lambda < 0 \Rightarrow \lambda u \uparrow \downarrow u \Rightarrow \lambda u \uparrow \uparrow v$

$\Rightarrow$ при $v \neq \vec{0}$. Винаги $\lambda u \uparrow \uparrow v$ и $|\lambda u| = |v| \Rightarrow \lambda u = v$.

С.1 Два вектора са колинеарни $\Leftrightarrow$ са лин. зависими. $\square$

Д-во Нека векторите са u и v .

Ако $u = \vec{0}$, то u и v са колинеарни и са лин. зависими.

Нека $u \neq \vec{0}$. Тогава $u \parallel v \Leftrightarrow \exists \lambda: v = \lambda u \Leftrightarrow u$ и v са лин. зависими. (Т-ма 1)

С.2 Векторите, колинеарни с дадена права, образуват едно-мерно реално лин. пр-во.

Д-во Това, че векторите, колинеарни с дадена права, образуват реално пр-во, следва от Т-ма 3 от тема 2. Из док, че е ~~линейно~~ ^{еднамерно}. $\exists$ 1 лин. независим вектор, т.е. ненулев. Всеки два вектора в ху правата са лин. зависими, защото са колинеарни.

(от С. 1) $\Rightarrow$ пространството е едномерно $\square$

Т-ма 2 Нека u, v, w са вектори, като u и v са неколинеарни.

Тогава u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} = w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$.

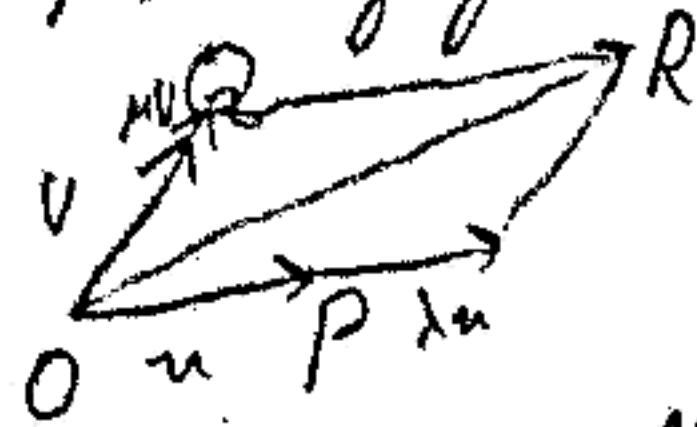
Числата λ и μ в това равенство са единствени.

Д-во

1) $(\Rightarrow)$ Нека $w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$

Нека O, P, Q, R : $\vec{OP} = u$, $\vec{OQ} = v$, $\vec{OR} = w \Rightarrow O, P$ и Q не са на една права, защото u и v не са ~~линейно независими~~ ^{колинеарни} $\Rightarrow O, P, Q$ заемат равнина.

От деф. на умн. на вектор с число ~~и~~ и собн. ~~рането~~ ^{рането} на вектори, всички ~~в~~ ^{лежат} в равн. OPQ ,



т.е. u, v, w имат представител в тази равнина $\Rightarrow$ са коллинеарни

2) (Единственост)

u и v са неколинеарни $\Rightarrow$ л.н. базис (по ш. 1) $\Rightarrow$ ако w се представя като л.н. комб. на u и v , то това става по единствен начин, т.е. коэф. λ и μ в това представяне са единствени

3) ($\Rightarrow$) Нека u, v, w са колинеарни. Нека O, P, Q, R !

$\Rightarrow O, P$ и Q не са на една права, защото u и v не са колинеарни.

$$\vec{OP} = u, \vec{OQ} = v, \vec{OR} = w$$

u, v, w са колинеарни $\Rightarrow w$ има представител в равн. OPQ



Той като $O \in$ равн. OPQ (зрещ. $\vec{OR} = w$), $R \in$ р. OPQ

Нека P_1 е прес. т. на OP и правата през R , която е $\parallel OQ$.

Нека $\vec{OP}_1 = u_1 \Rightarrow u_1 \parallel u$ и $u_1 \neq \vec{0}$ (иначе $u \parallel v$). По т-ма 1

$\exists \lambda \in \mathbb{R} : u_1 = \lambda u$. Нека Q_1 е пресечна точка на правата OQ с правата през R , която е $\parallel OP$. Нека $\vec{OQ}_1 = v_1 \Rightarrow v_1 \parallel v$ и $v_1 \neq \vec{0}$ (иначе $u \parallel v$).

По т-ма 1 $\exists \mu \in \mathbb{R} : v_1 = \mu v$

Той като O, P_1, R, Q_1 е успоредник, то

$$\begin{matrix} w = u_1 + v_1 = \lambda u + \mu v \\ \parallel \quad \parallel \quad \parallel \\ \vec{OR} \quad \vec{OP}_1 \quad \vec{OQ}_1 \end{matrix}$$

ш. 3 Три вектора са колинеарни $\Leftrightarrow$ са л.н. зависим □

Д-во Нека трите вектора са u, v, w . Ако $u \parallel v$, то u, v и w са колинеарни, ~~от~~ също u и v са л.н. зависим (от ш. 1), 19

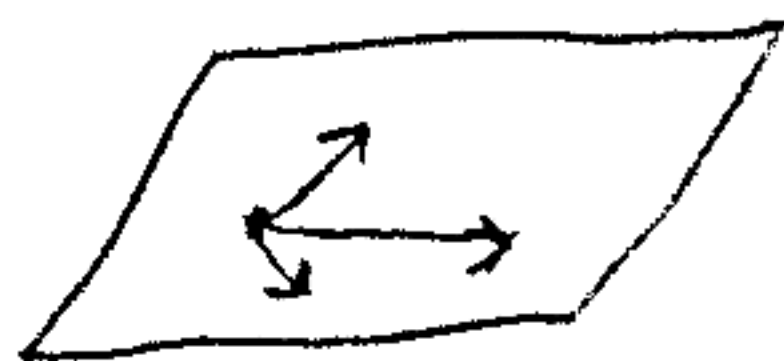
следователно u, v, w са лм. зависими. Нека u и v не са коллинеарни. Тогава u, v, w са коллинеарни $\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu: w = \lambda u + \mu v$ ^(Т-ма 2)
 $\Leftrightarrow u, v, w$ са лм. зависими. (защото u и v са лм. независими, защото не са коллинеарни). $\square$

Сл. 4 Векторите, коллинеарни с дадена равнина, образуват двумерно реално лм. пр-во.

Д-во Това, че образуват лм. пр., следва от т-ма 3 от тема 2.

Ще докажем, че е двумерно.

$\exists$ два неколинеарни вектора в равнината, т.е. два лм. независими (по сл. 1). Всеки три вектора в тази равнина са коллинеарни, т.е. лм. зависими по сл. 3.

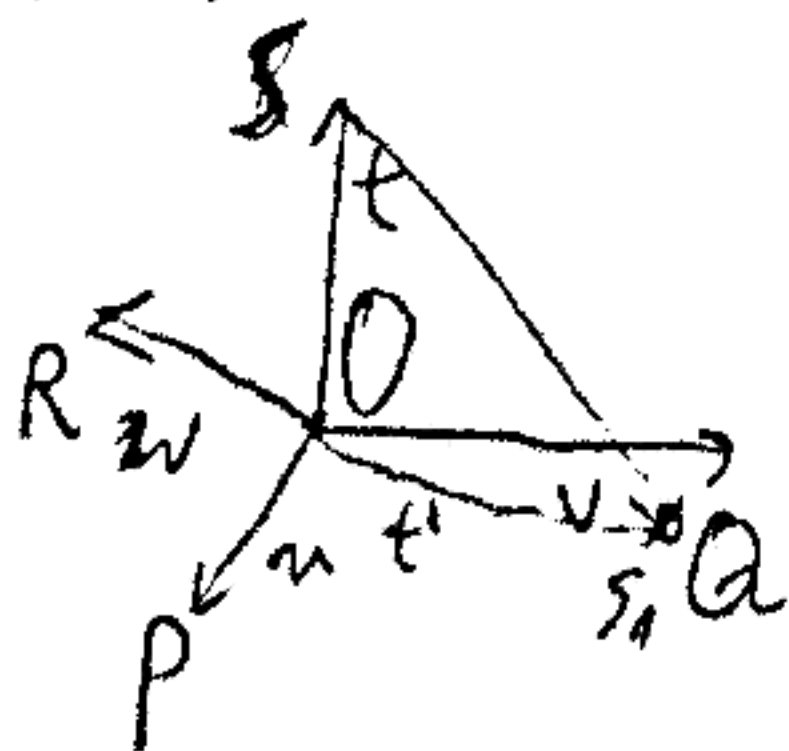


$\Rightarrow$ пространството е двумерно. $\square$

Т-ма 3 Нека u, v, w са вектори, които не са коллинеарни. Тогава за всеки вектор t съществуват единствени $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$:
 $t = \lambda u + \mu v + \nu w$.

Д-во Нека O, P, Q, R, S : $\vec{OP} = u, \vec{OQ} = v, \vec{OR} = w, \vec{OS} = t$.

Тъй като u, v, w не са коллинеарни, то ~~точките~~ O, P, Q, R не са в една равнина.



Нека S_1 е пресечната точка на OPQ с правата през S , която е $\parallel \vec{OR}$.

Означаваме $t' = \vec{OS_1}, t'' = \vec{S_1S}$. По правилото на триъгълника, $t = t' + t''$.

t', u, v са коллинеарни, защото имат представител в равнината OPQ . u и v са неколинеарни (защото иначе бихме имали, че u, v, w са коллинеарни).

$$\Rightarrow (\text{от т-ма 1}) \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}: t' = \lambda \cdot u + \mu \cdot v.$$

$t'' \parallel \vec{OR}$, т.е. $t'' \parallel w$ и $w \neq \vec{0}$ (звучото иначе $R=O$ и u, v, w няма да бъдат колониални)

$$\Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}: t'' = v \cdot w \text{ (т-ма 1)}.$$

$$t = t' + t'' = \lambda u + \mu v + v w.$$

Тъй като u, v, w са неколониални, то те са лн. незав. (с. 3) $\Rightarrow$ изр. t се пише като тяхна лн. комбинация, то това става по единствен начин, т.е. коеф. λ, μ, v в тази лн. комбинация са единствени $\square$

Сл. 5 Всеки четир вектора в пространството са лн. зависими

Д-во t, u, v, w

Ако u, v, w са лн. зависими, то t, u, v, w също са лн. зависими.

Ако u, v, w са лн. независими, то те са колониални (по с. 3) и $\Rightarrow t$ е лн. комбинация на $u, v, w \Rightarrow$ (т-ма 3)

$\Rightarrow t, u, v, w$ са лн. зависими $\square$

Сл. 6 Векторите в пространството образуват тримерно реално лн. пр.

Д-во Това, че обр. лн. пр., следва от т-ма 3 от тема 2.

Ще докажем, че е тримерно.

В пространството съществуват три ~~неколонниални~~ ^{неколонниални} вектора.

$\Rightarrow$ те са лн. независими от с. 3. $\nearrow$

От с. 5 $\Rightarrow$ всеки 4 вектора са лн. зависими

$\Rightarrow$ лн. пр. е тримерно.

Отношение по 1A: Дадено е V : n -мерно л.н. пр.

Опр. Базис (база) е наредена n -орка вектори от V

$e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, които са л.н. независими. (т.е. $e_1, \dots, e_n \in V$ са л.н. независими).

Тв. 1 Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на V и $v \in V$. Тогава $\exists! x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$:
 $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Тези $x_1, \dots, x_n$ се наричат координати на v спрямо базиса e .

Пр. 1 $\mathbb{R}^n$

$$e_i = (0 \dots \underset{\substack{\downarrow \\ i\text{-та позиция}}}{1} \dots 0)^T, i=1, \dots, n$$

$e_1, \dots, e_n$ са л.н. независими и са n на брой в $\mathbb{R}^n$, което е n -мерно. $\Rightarrow e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на $\mathbb{R}^n$.

Матрица се стандартен (каноничен) базис.

$$\text{Ако } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$\Rightarrow$ координатите на x спрямо стандартния базис са точно компонентите му.

24.10.2018 9. Афинни координатни системи. Ориентация.

Озн. с A_3 множеството от точки в пространството, а с V_3 - мн. пр. на векторите в пространството.

Нека π е равнина. Озн. с A_2 множеството от точки върху π , а с V_2 - мн. пр. на векторите, коллинеарни с π .

Нека ℓ е права. Озн. с A_1 мн. от т. в-ху ℓ , а с V_1 - мн. пр.-во на векторите, коллинеарни с ℓ .

Заб. Оттук нататък под $\vec{OP}$ ще разбираме свободния вектор с представител изчислената отсечка OP . Ако ни трябва нас. отсечка, ще го уточняваме изрично.

Опр. Афинна координатна система K в A_n е двойка, състояща се от точка $O \in A_n$ и базис $(e_1, \dots, e_n)$ на V_n . Тъй като $K = Oe_1, \dots, e_n$, т. O се нарича начало на K , а векторите $e_1, \dots, e_n$ координатни или базисни.

Ако $|e_i| = 1, i = 1, \dots, n$ и $e_i \perp e_j$ за $i \neq j$, то K се нарича орто-нормирана координатна система.

Опр. Нека $K = Oe_1, \dots, e_n$ е афинна координатна система в A_n .

1) Нека $v \in V_n$. Тогава под координати на v спрямо K се разбират координатите на v спрямо базиса $(e_1, \dots, e_n)$, т.е. тъй като $(e_1, \dots, e_n)$ е базис на V_n , то $\exists! x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Тогава $(x_1, \dots, x_n)$ са координатите на v спрямо K (и спрямо $(e_1, \dots, e_n)$). Тъй като $v(x_1, \dots, x_n)$.

2) ~~Нека~~ Нека т. $P \in A_n$. Под координати на P отн. K разбираме координатите на в-ра $\vec{OP}$ спрямо K , т.е. ако $\vec{OP} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, то координатите на P спрямо K са $(x_1, \dots, x_n)$. Тъй като $P(x_1, \dots, x_n)$. $\vec{OP}$ се нарича позиционен вектор на P отн. K .

Знаб. ~~Система~~ Системе, че е зададена координатна система $K = Oe_1, \dots, e_n$. Правата, която се определя от т. О и вектора e_i и е ориентирана с e_i , се нарича i -та координатна ос на K и често се означава с Ox_i .

Ox_1 се нарича абсцисна ос, а коорд. x_1 - абсциса. Често вместо x_1 се пише x .

При $n \geq 2$ оста Ox_2 се нарича ординатна ос, а коорд. x_2 ордината и често се ozn. с y вместо x_2 .

При $n=3$ оста Ox_3 се нарича ~~ординатна~~ ~~ос~~ ос, а коорд. x_3 апсисата и често се ozn. със z вместо с x_3 .

Вместо $Oe_1, \dots, e_n$ често се пише $Ox_1, \dots, x_n$.

~~Отклонение по ЛА:~~
Нека V е n -мерно реално линейно пространство. Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ са ф.б. базиса на V . Матрица на прехода от базиса e към базиса f наричаме матрицата

$T = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, която се деф. по следния начин:

$$f_1 = t_{11} \cdot e_1 + t_{21} e_2 + \dots + t_{n1} e_n$$

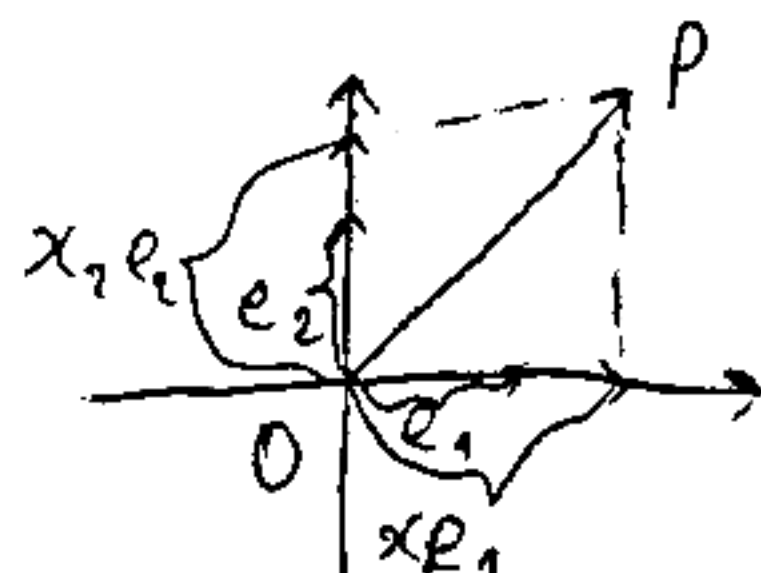
$$f_2 = t_{12} \cdot e_1 + t_{22} e_2 + \dots + t_{n2} \cdot e_n$$

$$\vdots$$

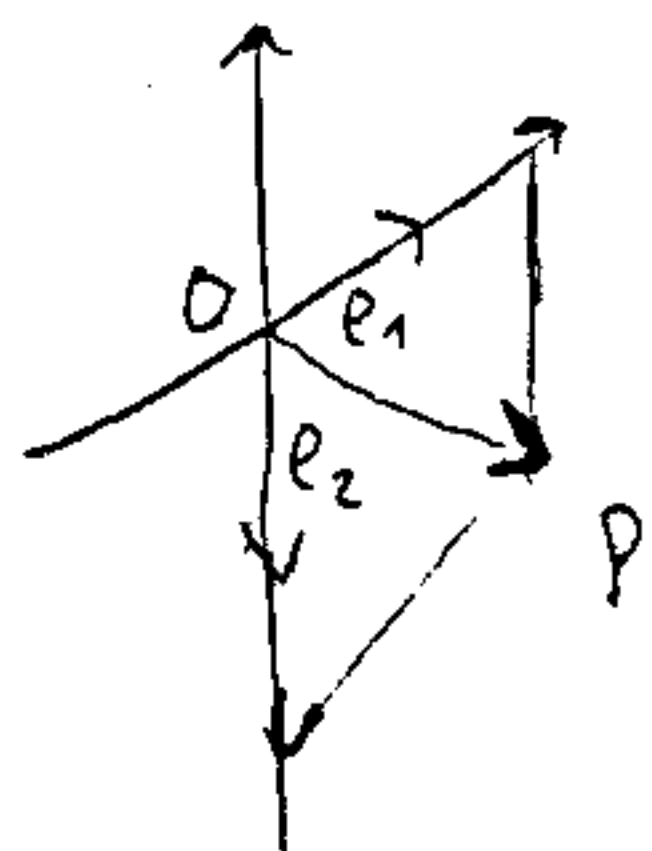
$$f_n = t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + \dots + t_{nn} e_n,$$

~~или~~ т.е. $f_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} e_i$.

С ~~други~~ други думи, стойностите на T са координатите на f -овете спрямо базиса e , т.е. j -ти стълб на T е стълба от координати на f_j спрямо базиса e .



координати на $\vec{OP}$ в ортонормирана система



координати на $\vec{OP}$ в неортонормирана система

Ако размениме $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ като редове, то горните уравнения са еквивалентни на $(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)T$, или още по-кратко: $f = eT$.

Тв. 1 (св. док.) Матрицата на преход T е обратима. В частност, $\det T \neq 0$.

(критерий на отклонението)

Опр. Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ са базиси на V и матр. на преход от e към f е T . Казваме, че e е еднородно ориентиран $\subset f$, ако $\det T > 0$. В този случай ние имаме $e \sim f$. Казваме, че e е противоположно ориентиран на f , ако $\det T < 0$. В този случай ~~кажем~~ ние имаме $e \not\sim f$.

Пр. 1

$$1) e = (e_1, \dots, e_n) - \text{базис}$$

$$f = (-e_1, \dots, e_n)$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\det T = -1 < 0 \Rightarrow e$ е противоположно ориентиран на f

2) Нека $n \geq 2$:

$$e = (e_1, \dots, e_n) - \text{базис}$$

$$f = (e_2, e_1, e_3, \dots, e_n)$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

~~кажем~~ $\det T = -1 < 0 \Rightarrow e$ е прот. ориентиран на f

3) Нека $n = 3$

$$e = (e_1, e_2, e_3) - \text{базис}$$

$$f = (e_2, e_3, e_1)$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

; $\det T = 1 \Rightarrow e$ е еднородно ориентиран ~~кажем~~ $\subset f$

Тв.1 Нека V е n -мерно реално л.м. пр.-во, $n \geq 1$. Тогава:

1) Релацията еднородна ориентированост на базиси е релация на еквивалентност

2) Класовете на еквивалентност относно тази релация са

опа:

ако f е едн. базис, то те са $\{e\text{-базис}; e \sim f\}$ и $\{e\text{-базис}; e \not\sim f\}$.

Д-во

1) Рефлексивност: $e = eE \Rightarrow$ матр. на преход от e към e е E .
 $\det E = 1 \Rightarrow e \sim e$.

Симетричност: $e \sim f \Rightarrow f = eT$ и $\det T > 0 \Rightarrow e = fT^{-1}$ и

$\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det T} > 0 \Rightarrow f \sim e$.

Транзитивност: $e \sim f$ и $f \sim g \Rightarrow f = eS$ и $\det S > 0$ и
 $g = fT$ и $\det T > 0$

$\Rightarrow g = fT = (eS)T = e(ST) \Rightarrow$ матрицата на преход от e към g е ST .
 $\det ST = \det S \det T > 0 \Rightarrow e \sim g$.

$\Rightarrow \sim$ е рел. на еквивалентност.

2) $\{e\text{-базис}; e \sim f\} = [f]$ - класът на f . Трябва да докажем, че $\{e\text{-базис}; e \not\sim f\}$ също е клас и че няма други класове.

$\{e\text{-базис}; e \not\sim f\} \neq \emptyset$, защото $e = (-f^1, f^2, \dots, f^n)$ е от това множество.

Нека $e \not\sim f$ и $g \not\sim f \Rightarrow f = eS$ и $\det S < 0$ и $g = fT$ и $\det T < 0$
 $\Rightarrow g = e(ST)$ и $\det(ST) = \det S \det T > 0 \Rightarrow e \sim g$. Тъй като всички
елементи на $\{e\text{-базис}; e \not\sim f\}$ са еквивалентни $\Rightarrow$ множеството
се съвкупва в някакъв клас на еквивалентност C .

Ако допуснем, че има елемент в C , който не е в $\{e: e \not\sim f\}$,
тои е в $[f] \Rightarrow C \cap [f] \neq \emptyset$ - противоречие. Следователно $\{e \sim f\} = C$.

Други класове нема, зато што за вако е $i \sim j$ или $i \not\sim j$
 $\Rightarrow$ класовите се д-и-орнаментите во формирувањата.

Опр. Ориентација во n -мерното реално л.м. пр-во V е вако
 еден од двата класа на еквивалентност односно класа на ек-
 вивалентност на базис.

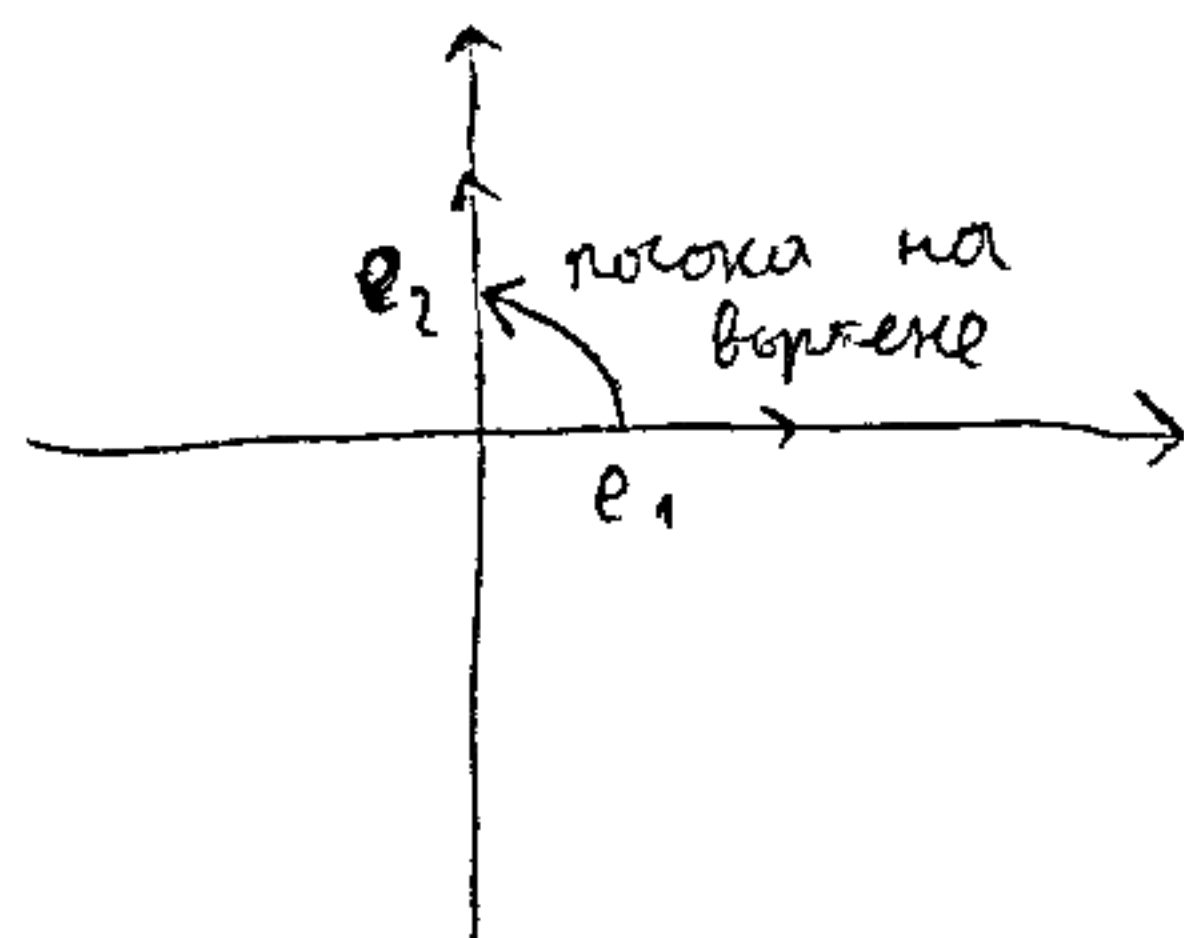
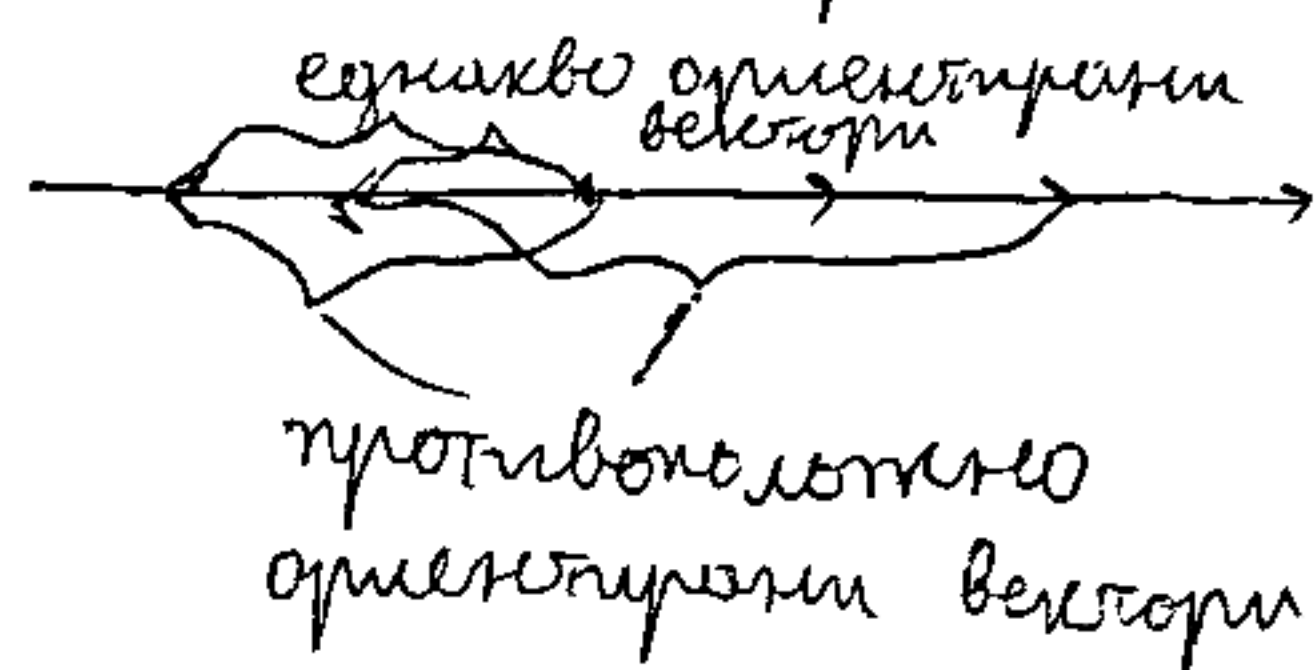
Казваме, че V е ~~оризентиран~~ ориентиран, ако е избра-
 на една од двете ориентации. Избраната ориентација се казва
 позитивна, а другата - негативна. Ориентацијата може да се
 зададе како се избере базис e : вземиме $[e]$.

Опр. Под ориентација во A_n разбираме ориентацијата во V_n .
 Казваме, че A_n е ориентирано, ако V_n е ориентирано.

Заб. Ориентација вокоу права се казва още ~~насокa~~ ^{насокa} в-коу
 правата, а ориентирана права се казва α . Ориентација во
 равнина се казва още ~~насокa~~ ^{насокa} на вртење во равнината.

Опр. ~~Нека~~ Нека A_n е ориентирано.

Казваме, че координатната система
 $K = Oe_1, \dots, e_n$ е позитивно ориенти-
рана или дясна (или соотв. отри-
цателно ориентирана или лева),
 ако коорд. базис задава позитивната
 (соотв. ~~отри~~ негативната) ориентација.



Заб. Немаме причина да предпочитаме
 едната ориентација пред другата.

Иде сметаме, че е ~~избран~~ ^{избран} една ориен-
 тација и иде ја каваме позитивна

5. Калитеарност и калитеарност на вектори чрез координати.

Отклонение по ЛА:

Ако V е лм. пр. над $\mathbb{R}$, V е n -мерно и $(e_1, \dots, e_n)$ - базис на V ,
тогава

Тв.1 u и v имат спрямо e координати $u(x_1, \dots, x_n), v(y_1, \dots, y_n)$,
то $u = v \Leftrightarrow x_i = y_i, i=1, \dots, n$.

Д-во $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$

$u = v \Leftrightarrow x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$,
понеже $e_1, \dots, e_n$ са лм. независими.

Тв.2 Нека векторите $v_1, \dots, v_k, u \in V$ имат спрямо e координати
 $v_i(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$ и $u(y_1, \dots, y_n)$. Нека $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Тогава
 $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \Leftrightarrow y_j = \lambda_1 x_{j,1} + \dots + \lambda_k x_{j,k}, j=1, \dots, n$.

(т.е. на лм. комб. на вектори съответства сумата лм. комб. на
координатите).

Д-во $u = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \lambda_i x_{j,i} e_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_{j,i} \right) e_j \Rightarrow j\text{-тата координата на}$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \text{ е } \sum_{i=1}^k \lambda_i x_{j,i} \Rightarrow u = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \Leftrightarrow j\text{-тата координата на } u =$$

$j\text{-тата координата на } \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$.

$$\Leftrightarrow y_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_{j,i}$$

Сл.1 Векторите $v_1, \dots, v_k \in V$ с координати $v_i(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$ спрямо e
са лм. зависими $\Leftrightarrow$ когато коорд. отговаря

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{pmatrix} \text{ са лм. зависими } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,k} \end{pmatrix} < k.$$

(край на отклоненията)

$K = Oe_1, \dots, e_n$ - афинна координатна система в A_n

Тв.1 Нека v -ните $u, v \in V_m$ имат ~~афинни~~^{спрямо} K координати $u(x_1, \dots, x_n), v(y_1, \dots, y_n)$. Тогава u и v са колинеарни $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix} \text{ има rank } \leq 1.$$

До-во

Знаем, че $u \parallel v \Leftrightarrow u$ и v са лн. зависими $\Leftrightarrow$ (ш.1 от отклоненията) $\text{rank} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix} \leq 1$. □

Тв.2 1) $n=2$: Ако $u(x_1, x_2), v(y_1, y_2)$ спрямо K , то $u \parallel v \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$

2) $n=3$: Ако $u(x_1, x_2, x_3), v(y_1, y_2, y_3)$, то $u \parallel v \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = 0,$

$$\det \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0.$$

(всички минори от ред 2 са 0)

До-во

$$1) \text{ ~~Ако~~ } u \parallel v \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \leq 1 \Leftrightarrow \text{~~детерминантите са 0~~}$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$2) u \parallel v \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \leq 1 \Leftrightarrow \text{всички минори от ред 2 са 0}$$

$\Leftrightarrow$ детерминантите от условията са 0.

Тв. 3 $n=3$: Ако $u(x_1, x_2, x_3), v(y_1, y_2, y_3), w(z_1, z_2, z_3)$ са елементи на K , то u, v, w са ~~линейно независими~~ колумни $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$

Д-во u, v, w са колумни $\Leftrightarrow$ са л.з. $\Leftrightarrow$

$\text{rank} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \leq 2 \Leftrightarrow$ всички минори от ред 3 са 0

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$$

□

31.10.2018

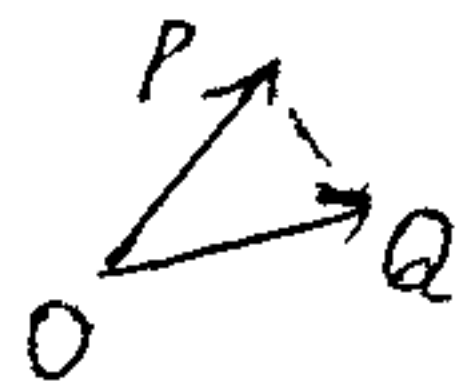
Зад. Считаме, че е зададена координатна система $K = Oe_1, \dots, e_n$ в A_n

Т-ма 1 Ако точките $P, Q \in A_n$ имат спрямо K координати $P(x_1, \dots, x_n)$ и $Q(y_1, \dots, y_n)$, то $\overrightarrow{PQ}$ има спрямо K координати $\overrightarrow{PQ}(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$

Д-во $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

То деф. $\overrightarrow{OQ}(y_1, \dots, y_n)$ и $\overrightarrow{OP}(x_1, \dots, x_n)$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$



□

6. Смяна на координатната система

Работим в A_n , т.е. едновременно в пространството ($n=3$), равнината ($n=2$) и ~~в-та~~ права ($n=1$).

V_n - векторите

Т-ма 1 Нека $K = Oe_1, \dots, e_n$ и $K' = O'e_1', \dots, e_n'$ са различни координатни системи в A_n , коор. на O' спрямо K са $(s_1, \dots, s_n) = S$, а матрицата на прехода от базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$ към базиса $e' = (e_1', \dots, e_n')$ е $T = (t_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$. Тогава

1) Неко $v \in V_n$ има спрямо K и K' координати съответно $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $x' = (x_1', \dots, x_n')$.

Тогава $x_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j'$, $i=1, \dots, n$. Ако означ. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

то горните равенства са еквивалентни на $x = Tx'$.

2) Нека т. $P \in A_n$ има спрямо K и K' координати съответно $(x_1, \dots, x_n)$ и $(x_1', \dots, x_n')$. Тогава $x_i = s_i + \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j'$, $i=1, \dots, n$. Ако

означ. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, то горните равенства са

еквивалентни на $x = s + Tx'$.

2-во ~~XXXXXXXXXXXX~~

2) $P(x_1, \dots, x_n)$ спрямо $K \Rightarrow \vec{OP}(x_1, \dots, x_n)$ спрямо K , т.е. спрямо базиса e

Аналогично: $O'(s_1, \dots, s_n)$ спрямо $K \Rightarrow \vec{OO'}(s_1, \dots, s_n)$ спрямо K , т.е. спрямо базиса e .

Аналогично: $P(x'_1, \dots, x'_n)$ спрямо $K' \Rightarrow \vec{O'P}(x'_1, \dots, x'_n)$ спрямо K ,
 $\Rightarrow \vec{O'P} = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j$

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$$

$$\Rightarrow \vec{OP} = \vec{OO'} + \sum_{j=1}^n x'_j e'_j$$

$\Rightarrow$ i -тата коорд на $\vec{OP}$ спрямо $K = i$ -тата коорд на $\vec{OO'}$ спрямо $K + \sum_{j=1}^n x'_j (i\text{-тата коорд на } e'_j \text{ спрямо } K)$, т.е.

$$x_i = s_i + \sum_{j=1}^n x'_j t_{ij}, i=1, \dots, n \quad \text{или} \quad x = s + T x'$$

1) V има коорд. $x'_1, \dots, x'_n$ спрямо $e' \Rightarrow V = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j$

$\Rightarrow (i\text{-тата коорд. на } V \text{ спрямо } K) = \sum_{j=1}^n x'_j (i\text{-тата коорд. на } e'_j \text{ спрямо } K) = t_{ij} \Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} x'_j, i=1, \dots, n.$

Заб. $v(x_1, \dots, x_n)$ спрямо e :

$$V = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$



$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, e = (e_1, \dots, e_n)$$

формално свързване



$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow V &= e \cdot x \\ \Rightarrow V &= e' \cdot x' \\ e' &= eT \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} e \cdot x &= e' \cdot x' = e \cdot T x' \\ x &= T x' \end{aligned}$$

Обратно, ако имаме ф-мата за смяна на коорд. $x = Tx'$:

$$e \cdot x = v = e' \cdot x'$$

$$\Rightarrow e \cdot Tx' = e' \cdot x' \Rightarrow \underbrace{eT}_{\text{формално}} = \underbrace{e'}_{\text{ф-та за смяна на базиса}}$$

Заб. Имаме $x = s + Tx' \Rightarrow$ "старите" координати се изразяват през "новите". За да изразим x' през x , решаваме уравнението и получаваме

$$x' = T^{-1}(-s + x) = -T^{-1}s + T^{-1}x.$$

Ако K и K' са ортонормирани, т.е. $(e_1, \dots, e_n)$ и $(e'_1, \dots, e'_n)$ са ортонормирани, то $T^{-1} = T^T$ (T е ортогонална). Тогава ф-мата за x' се опростява до $x' = -T^T s + T^T x$.

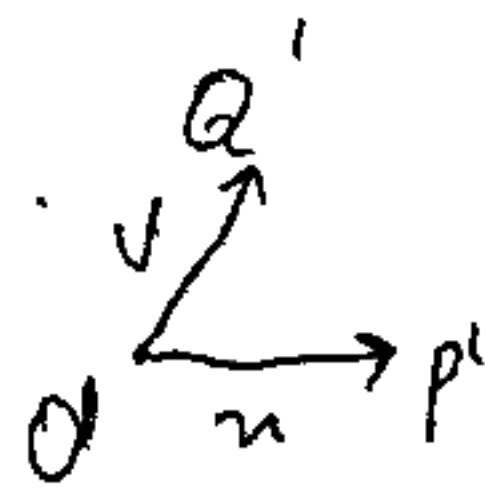
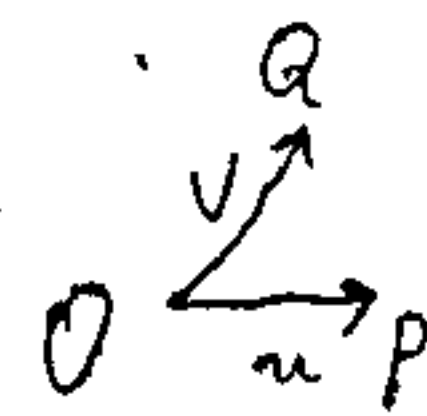
7. Скалярно произведение

Опр. Под ъгъл между ненулевите вектори u и v разбираме ъгъл между произволни техни представители с общо начало. Опр. го с $\angle(u, v)$. Ако $\angle(u, v) = \frac{\pi}{2}$, то казваме, че u и v са перпендикулярни или ортогонални.

Коректност

Той като $\vec{OP} \uparrow \uparrow \vec{O'P'}$ и $\vec{OQ} \uparrow \uparrow \vec{O'Q'}$,

то $\angle POQ = \angle P'O'Q' \Rightarrow$ ъгъл е коректен.



Пр. 1

$$u \neq 0$$

$$\angle(u, u) = 0$$

$$\angle(u, -u) = \pi$$



Смятаме, че е фиксирана единична отсечка за измерване на дължини в пространството.

Опр. Дефинирана координатна система $K = Oe_1, \dots, e_n$ се нарича ортонормирана, ако коорд. базис (e_1, e_2, e_3) е ортонормиран, т.е. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, $e_i \perp e_j$ при $i \neq j$.

Т-ма 1 Нека $K = Oe_1, e_2, e_3$ е ортонормирана коорд. система. Тогава

- 1) Ако векторът v има спрямо K коорд. (x_1, x_2, x_3) , то $|v| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
- 2) Ако $P \sim Q$ имат спрямо K коорд. $P(x_1, x_2, x_3)$ и $Q(y_1, y_2, y_3)$, то $|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$.

До-во

1) Нека $P: \vec{OP} = v$. Тогава $|v| = |OP|$ и $P(x_1, x_2, x_3)$.

Нека P' е орт. проекция на P в равн. Ox_1x_2 .

Тогава $|OP|^2 = |OP'|^2 + |P'P|^2$ (питагорови теорема).

Имаме $P'(x_1, x_2, 0) \Rightarrow |\vec{OP}'|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 = x_1^2 + x_2^2$ (питагорова т-ма)

$$|P'P| = |x_3| \Rightarrow |P'P|^2 = x_3^2$$

$$\Rightarrow |OP|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$|v|^2$$

$$\Rightarrow |v| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

2) Имаме, че $|PQ| = |\vec{PQ}|$, а $\vec{PQ}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$

$$\Rightarrow \text{от 1) } |PQ| = |\vec{PQ}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

□

Опр. Скалярно произведение на векторите u и v се нарича числото $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$, дефинирано по следния начин:

(а) Ако $u = \vec{0}$ или $v = \vec{0}$, то $\langle u, v \rangle = 0$

(б) Ако $u \neq \vec{0}$ и $v \neq \vec{0}$, то $\langle u, v \rangle := |u||v| \cos \angle(u, v)$

Заб. Срезуят се и означенията $u \cdot v$; uv ; (u, v) ; $\langle u/v \rangle$

Лем. 2 $u \neq \vec{0}$

$$\langle u, u \rangle = |u||u| \cos \underbrace{\angle(u, u)}_0 = |u|^2 > 0$$

Т-ма 2 (Критерий за перпендикулярност на вектори)

Ненулевите вектори u и v са перпендикулярни $\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$

Д-во ~~$\langle u, v \rangle = 0$~~ $\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow |u| |v| \cos \varphi(u, v) = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi(u, v) = 0$

$\Leftrightarrow \varphi(u, v) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u \perp v.$ □

Т-ма 3 Нека спрямо ортонорм. коорд. система $K = Oe_1e_2e_3$

u и v имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава

$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$

Д-во Ако $u = \vec{0}$ или $v = \vec{0}$, то $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ или $y_1 = y_2 = y_3 = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$

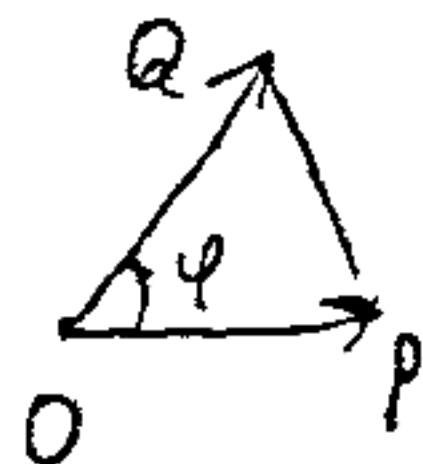
$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$

Нека $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$. Нека $P, Q: \vec{OP} = u, \vec{OQ} = v$.

Косинусовата теорема ни дава, че

$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ|\cos \varphi.$

(Теоремата важи и ако u и v).



$\varphi = \varphi(u, v)$

$|OP| = |u|, |OQ| = |v|, \varphi = \varphi(u, v)$

$\Rightarrow |OP||OQ|\cos \varphi = |u||v|\cos \varphi(u, v) = \langle u, v \rangle$

$\Rightarrow \cancel{|PQ|^2} = |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v \rangle \Rightarrow \langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 - |PQ|^2).$

По т-ма 1 $|u|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$|v|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

$P(x_1, x_2, x_3), Q(y_1, y_2, y_3) \Rightarrow$ (т-ма 1) $|PQ|^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \Rightarrow \langle u, v \rangle = \dots = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ □

От т-ма 1, т-ма 2, т-ма 3 $\Rightarrow$ Следната теорема

Т-ма 4 ^{нека} Ненулевите вектори u и v имат спрямо ортонорм. коорд. система K координати $u(x_1, x_2, x_3), v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава

1) $u \perp v \Leftrightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$

2) $\cos \varphi(u, v) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$ (т.е. $\varphi(u, v) = \arccos(\dots)$)

$$\left(\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} \right)$$

Т-ма 5 Скалярното произведение има следните основни свойства:

- (1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (симетричност)
- (2) $\langle u' + u'', v \rangle = \langle u', v \rangle + \langle u'', v \rangle$ (адитивност по първия аргумент)
- (3) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ (хомогенност по първия аргумент)
- (4) За $u \neq \vec{0}$ $\langle u, u \rangle > 0$ (положителна дефинитивност)

2-во Нека $u(x_1, x_2, x_3), v(y_1, y_2, y_3)$ спрямо една ортонорм. коорд. система K .

$$(1) \langle u, v \rangle \stackrel{\text{Т-ма 3}}{=} y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \stackrel{\text{Т-ма 3}}{=} \langle v, u \rangle$$

(а и от деф., тъй като $\angle(u, v) = \angle(v, u)$)

$$(2) \text{ Нека } u'(x_1', x_2', x_3') \text{ и } u''(x_1'', x_2'', x_3'') \Rightarrow (u' + u'')(x_1' + x_1'', x_2' + x_2'', x_3' + x_3'') =$$

$$\Rightarrow \langle u' + u'', v \rangle \stackrel{\text{Т-ма 3}}{=} (x_1' + x_1'') y_1 + (x_2' + x_2'') y_2 + (x_3' + x_3'') y_3 =$$

$$= (x_1' y_1 + x_2' y_2 + x_3' y_3) + (x_1'' y_1 + x_2'' y_2 + x_3'' y_3) = \langle u', v \rangle + \langle u'', v \rangle$$

$$(3) \lambda u(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3). \text{ Тогава } \langle \lambda u, v \rangle \stackrel{\text{Т-ма 3}}{=} (\lambda x_1) y_1 + (\lambda x_2) y_2 + (\lambda x_3) y_3 =$$

$$= \lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \stackrel{\text{Т-ма 3}}{=} \lambda \langle u, v \rangle$$

(4) $\langle u, u \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$, защото поне една координата е различна от 0, защото $u \neq \vec{0}$.

$$(а и от пр. 2 : \langle u, u \rangle = |u|^2 > 0 \text{ при } u \neq \vec{0})$$

~~Следва да се докаже:~~

Опр. Ако в реално лн. пр-во V е дадено изображение $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$, което има четирите свойства от Т-ма 5, то това изображение се нарича скалярно произв. във V , а V се нарича евклидово линейно пространство.

Сл.1 Когато скалярно произведение е скалярно произведение в смисла на линейната алгебра $\rightarrow$ векторите в пространството образуват примерно евклидово пространство (в смисла на лн. алгебра).

Зам. Свойства (2) и (3) заедно са еквив на $\langle \lambda' u' + \lambda'' u'', v \rangle = \lambda' \langle u', v \rangle + \lambda'' \langle u'', v \rangle$,

което се казва линейност по първия аргумент.

Освен това, от симетричността следва, че скалярното произведение е адитивно, хомогенно по втория аргумент.

Сл.2 Скалярното произведение е симетрично, ^{линейно по двата аргумента} билинейно и положително дефинитно.

Тв.1 Нека K е произволна афинна коорд. система и турямо неж векторите u и v имат коорд. $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(y_1, y_2, y_3)$.
Тогава

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} x_i y_j = g_{11} x_1 y_1 + g_{22} x_2 y_2 + g_{33} x_3 y_3 + \\ + g_{12} (x_1 y_2 + x_2 y_1) + g_{13} (x_1 y_3 + x_3 y_1) + g_{23} (x_2 y_3 + x_3 y_2),$$

където $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$

Освен това $|u|^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} x_i x_j = g_{11} x_1^2 + g_{22} x_2^2 + g_{33} x_3^2 + \\ + 2g_{12} x_1 x_2 + 2g_{13} x_1 x_3 + 2g_{23} x_2 x_3$

Д-во $\langle u, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j \rangle =$ (билинейност) $\sum_{i,j=1}^3 x_i y_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{g_{ij}} =$

$$= \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} x_i y_j.$$

Второто равенство следва от $g_{ji} = \langle e_j, e_i \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$.

Заб. Две вектора u и v в равнината (а и в-та права) като навсякъде се махне третата координата (съотв. втората и третата координати), и в и. 1 пространството е двумерно (съотв. едномерно).

8. Векторно произведение

Работим в пространството и считаме, че e_1, e_2, e_3 са фиксирана единична осемка за измерване на дължини и ориентация.

Опр. Векторно произведение на векторите u и v се нарича векторът $u \times v$, деф. по следния начин:

(a) ако $u \parallel v$, то $u \times v = \vec{0}$

(b) ако $u \nparallel v$, то $u \times v$ е единственият вектор, който удовл.

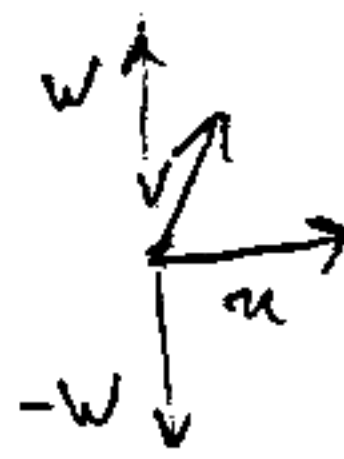
1) $|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u, v)$

2) $u \times v \perp u$ и $u \times v \perp v$

3) $(u, v, u \times v)$ е положително ориентирана базис (дясна тройка)

Коректност (наличието $\exists!$ такъв вектор)

$$\begin{matrix} \text{ако } u, v \neq \vec{0} & \text{и } u \nparallel v \\ |u| > 0 & |v| > 0 & \sin \angle(u, v) \neq 0 \\ \neq 0 & \neq 0 & \neq 0, \pi \end{matrix} \Rightarrow w \neq \vec{0}$$



$\Rightarrow (u, v, w)$ и $(u, v, -w)$ са базиси с противоположна ориентация.

$\Rightarrow$ Точно един от тях е положително ориентиран и ~~базис~~ ^{базис} работата за дефиницията.

07.11.2018

Зад. Векторното произведение се означава $u \times v$

Зад. Ако $u \parallel v$, $u \neq 0$ и $v \neq 0$, то $\angle(u, v) = 0$ или π

$$\Rightarrow \sin \angle(u, v) = 0 \Rightarrow |u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u, v) = 0$$

$$\Rightarrow u \times v = \vec{0}$$

т.е. (a) от деф. се получава от (b) при $u \neq \vec{0}$ и $v \neq \vec{0}$.

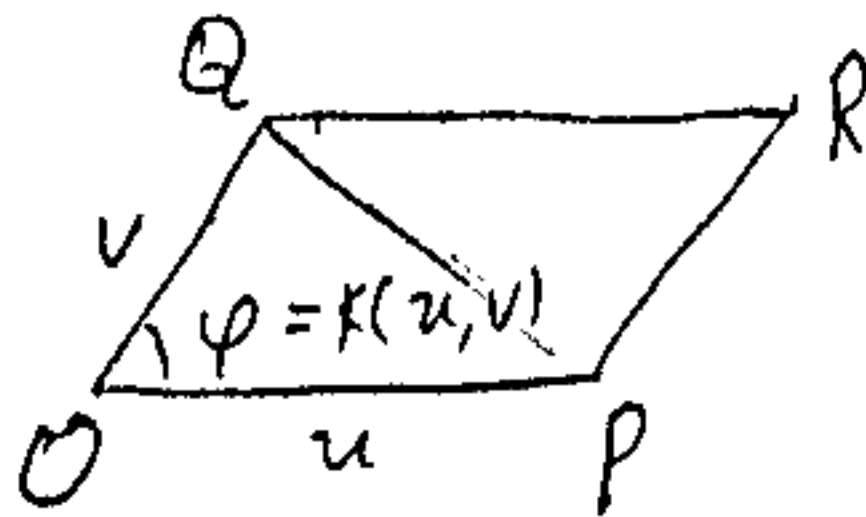
Т-ма 1 (Критерий за колinearност) Векторите u и v са колinearни $\Leftrightarrow u \times v = \vec{0}$.

Т-ма 2 (Геом. интерпретация на векторното произведение чрез лице)

Лицето на успоредника, построен в-към неколinearните вектори u и v , е $|u \times v|$, а лицето на триъгълника, построен в-към тях, е $\frac{1}{2}|u \times v|$

Д-во Нека O е произв., $P: \vec{OP} = u$
 $Q: \vec{OQ} = v$

$R: OPRQ$ е успоредник



$$\begin{aligned} S &= |OP| \cdot |OQ| \sin \varphi = \\ &= |u| |v| \sin \angle(u, v) = \\ &= |u \times v| \end{aligned}$$

$$S_{OPQ} = \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} |u \times v|$$

Т-ма 3 Нека $K = Oe_1e_2e_3$ е пол. ориентирана ортонормирана координатна система и спрямо нея векторите u и v имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(y_1, y_2, y_3)$.

Тогава координатите на $u \times v$ спрямо K са следните:

$$u \times v (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) = \\ = u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Д-во Нека w е векторът с координатите от условието, т.е.

$$w (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Ще докажем, че $w = u \times v$.

Нека $u \parallel v$. Ако $u = \vec{0}$, то $x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow w = \vec{0} = u \times v$

$$\text{Ако } u \neq \vec{0}, \text{ то } \exists \lambda \in \mathbb{R}: v = \lambda u \Rightarrow y_1 = \lambda x_1, y_2 = \lambda x_2, y_3 = \lambda x_3 \\ \Rightarrow w = \vec{0} = u \times v$$

$$\Rightarrow \text{ако } u \parallel v, \text{ то } w = \vec{0} = u \times v$$

Нека u и v не са коллинеарни. $|w|^2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$

$$= \dots = \underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}_{|u|^2} \underbrace{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}_{|v|^2} - \underbrace{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)}_{\langle u, v \rangle^2} =$$

$$= |u|^2 |v|^2 \left(1 - \frac{\langle u, v \rangle^2}{|u|^2 |v|^2} \right) = |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2 \angle(u, v)) = |u|^2 |v|^2 \sin^2 \angle(u, v)$$

$$\angle(u, v) \in (0, \pi) \quad (\text{За } 0 \text{ и } \pi, \text{ защото } u \nparallel v) \Rightarrow \sin \angle(u, v) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |w| = |u| |v| \sin \angle(u, v) \Rightarrow |w| > 0 \text{ и } w \neq \vec{0}.$$

$$\langle w, u \rangle = (x_2 y_3 - x_3 y_2) x_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) x_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) x_3 = \dots = 0$$

$$\Rightarrow w \perp u$$

Аналогично पाचुवावे, че $w \perp v$.

Остава да проверим, че (u, v, w) е положително ориентиран базис. Тъй като $w \perp u$ и $w \perp v$, то (u, v, w) образуват базис.

Ще покажем, че матрицата на прехода от (e_1, e_2, e_3) към (u, v, w) има поз. детерминанта

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_2 & y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_3 & y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (x_1 y_2 - x_2 y_1) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

$$= |w|^2 > 0$$

$\Rightarrow (e_1, e_2, e_3)$ и (u, v, w) са еднакво ориентирани $\Rightarrow (u, v, w)$ е положително ориентиран базис

$\Rightarrow w$ удов. и трите условия за $u \times v \Rightarrow w = u \times v$. □

Заб. Изпълнено е следното формално равенство:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix} = u \times v = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3$$

$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow u \times v (z_1, z_2, z_3)$$

Друг начин на запазване на координатите на $u \times v$:

$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ i -тата координата на $u \times v$ е минорът, който се получава като се задрезка i -тия ред, но само при $i=2$ трябва минорът да се умножи по (-1) . (или винаги се взимат с $+$, но всеки път започваме от следващия ред).

Т-ма 4 Векторното произведение има следните основни свойства:

(1) $v \times u = -u \times v$ (антисиметричност)

(2) $(u' + u'') \times v = u' \times v + u'' \times v$ (дистрибутивност по двата аргумента или адитивност)

(3) За $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$, $u \times (\lambda v) = \lambda(u \times v)$ (хомогенност по двата аргумента)

Дво векта $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ е пак ориентирана, ортонормирана коорд. система
и спрямо нея $u(x_1, x_2, x_3), v(y_1, y_2, y_3)$

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} &u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \\ &v \times u \left(\begin{vmatrix} y_2 & x_2 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \quad - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cancel{u \times v} \quad v \times u = -u \times v$$

(2) Нека $u'(x_1', x_2', x_3'), u''(x_1'', x_2'', x_3'')$

Тогава $\cancel{u' + u''} = u' + u''(x_1' + x_1'', x_2' + x_2'', x_3' + x_3'')$

$$\Rightarrow \cancel{(u' + u'') \times v} \quad (u' + u'') \times v \left(\begin{vmatrix} x_2' + x_2'' & y_2 \\ x_3' + x_3'' & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3' + x_3'' & y_3 \\ x_1' + x_1'' & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1' + x_1'' & y_1 \\ x_2' + x_2'' & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$\underbrace{\begin{vmatrix} x_2' & y_2 \\ x_3' & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2'' & y_2 \\ x_3'' & y_3 \end{vmatrix}}_{\text{аналогично}}$

$$\Rightarrow (u' + u'') \times v = u' \times v + u'' \times v$$

$$\Rightarrow u \times (v' + v'') = -(v' + v'') \times u = (-v' \times u) + (-v'' \times u) = u \times v' + u \times v''$$

(3) $\lambda u(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

$$(\lambda u) \times v \left(\begin{vmatrix} \lambda x_2 & y_2 \\ \lambda x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda x_3 & y_3 \\ \lambda x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda x_1 & y_1 \\ \lambda x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\lambda \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad \lambda \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \quad \lambda \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (\lambda u) \times v = \lambda(u \times v) \quad \cancel{\lambda(u \times v)} =$$

$$\Rightarrow u \times (\lambda v) = -(\lambda v) \times u = \lambda(-v \times u) = \lambda(u \times v)$$

Зад. Второто и третото векторно зрещо са еквивалентни на
 $(\lambda' u' + \lambda'' u'') \times v = \lambda' u' \times v + \lambda'' u'' \times v$ (линейност по първи арг.) или
 $u \times (\lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' u \times v' + \lambda'' u \times v''$ (лин. по втори арг.),
 т.е. векторното произведение е симетрично.

2.9. Смесено произведение

Работим в пространството и считаме, че са фиксирани
 единична отсечка и ориентация

опр. Смесено произведение на векторите u, v, w (в този ред) се
 нарича числото $\langle u, v, w \rangle = \langle u \times v, w \rangle \in \mathbb{R}$.

Т-ма 1 (Геометрична интерпретация на смесеното произведение
 чрез обем)

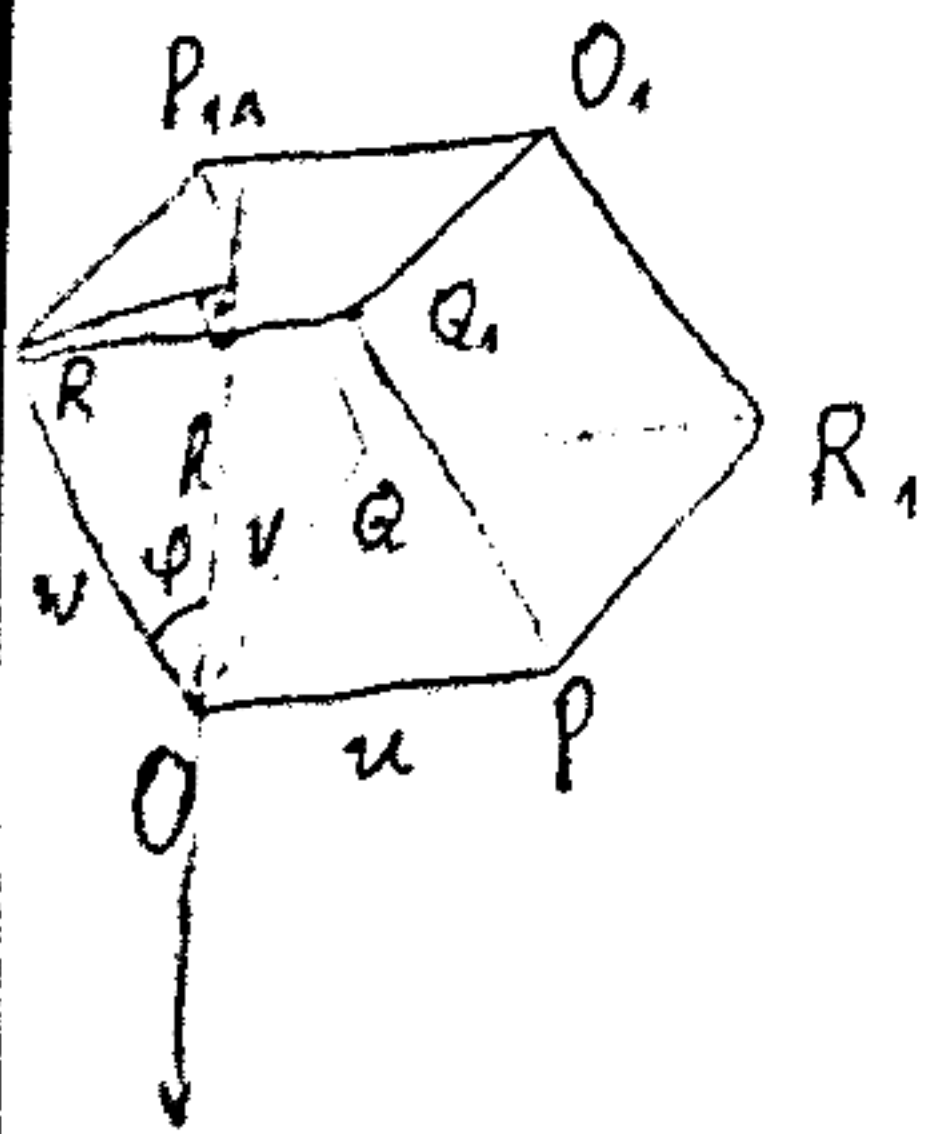
Обемът на паралелепипеда, построен върху некопланарните
 вектори u, v, w , е $|\langle u, v, w \rangle|$, а обемът на тетраедъра, построен
 в-ху тях, е $\frac{1}{6} |\langle u, v, w \rangle|$.

Д-во Нека O е произволна точка, а

$$P: \vec{OP} = u$$

$$Q: \vec{OQ} = v$$

$$R: \vec{OR} = w$$



Нека V е обемът на паралелепипеда

$$\langle \vec{OP}, \vec{OQ}, \vec{OR} \rangle$$

$$V = S_{OPR, Q} \cdot h$$

$$|u \times v|$$

$$|w| \cos \varphi$$

(т-ма 2 от Темата за вект. произведение)

$$u \times v \perp u \text{ и } u \times v \perp v \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \angle(u \times v, w) & \text{при } \angle(u \times v, w) \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \angle(u \times v, w) & \text{при } \angle(u \times v, w) \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ако $\angle(u \times v, w) \leq \frac{\pi}{2}$, то $\cos \angle(u \times v, w) \geq 0$
 Ако $\angle(u \times v, w) \geq \frac{\pi}{2}$, то $\cos \angle(u \times v, w) \leq 0$ } $\Rightarrow \cos \varphi = |\cos \angle(u \times v, w)| \geq 0$

~~Ако $\angle(u \times v, w) \leq \frac{\pi}{2}$, то $\cos \angle(u \times v, w) \geq 0$~~

$$V = \underbrace{|u \times v|}_{\geq 0} \underbrace{|w|}_{\geq 0} |\cos \angle(u \times v, w)| = |u \times v| |w| \cos \angle(u \times v, w) = |\langle u \times v, w \rangle| = |\langle u, v, w \rangle|$$

~~Тетраедърът, построен в-ху u, v, w , е $OPQR$.~~

$$V_{OPQR} = \frac{1}{3} S_{OPQ} \cdot h = \frac{1}{6} \underbrace{S_{OPQ}}_V \cdot h = \frac{1}{6} V = \frac{1}{6} |\langle u, v, w \rangle| \quad \square$$

Заб. Смесеното произведение се означава още с ~~$u v w$~~ $u(u, v, w)$

~~Ако u, v, w са вектори в $\mathbb{R}^3$, то $u(u, v, w) = \det(u, v, w)$~~

Т-ма? Нека $K = Oe_1e_2e_3$ е положително ориентирана ортогонална координатна система и спрямо нея векторите u, v, w имат координати

$$u(x_1, x_2, x_3); v(y_1, y_2, y_3); w(z_1, z_2, z_3)$$

$$\text{Тогава } \langle u, v, w \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Д-во

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_1 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 =$$

$$= \langle u \times v, w \rangle = \langle u, v, w \rangle \quad \square$$

Т-ма 3 (Критерий за коллинеарност на три вектора)

Векторы u, v, w ортогональны $\Leftrightarrow \langle u, v, w \rangle = 0$

D-во Нека K е ~~кръг.~~ полож. ориент. ортонорм. координатна система. Тогава u, v, w са колумновни $\Leftrightarrow$ детерминантата на матрицата им спрямо K е 0. $\Leftrightarrow \langle u, v, w \rangle = 0$
Т-ма 2 □

Т-ма 4 (Основни свойства на смешното произведение)

$$(1) \langle v, u, w \rangle = -\langle u, v, w \rangle = \langle u, w, v \rangle \quad (\text{антисимметричность})$$

$\langle w, v, n \rangle$

(2) $\langle v, w, u \rangle = \langle u, v, w \rangle = \langle w, u, v \rangle$ (symmetry)

(3) $\langle u^1 + u'', v, w \rangle = \langle u^1, v, w \rangle + \langle u'', v, w \rangle$
 $\langle u, v^1 + v'', w \rangle = \langle u, v^1, w \rangle + \langle u, v'', w \rangle$
 $\langle u, v, w^1 + w'' \rangle = \langle u, v, w^1 \rangle + \langle u, v, w'' \rangle$

сложивность или
 дистрибутивность по трем
 аргумента!

содителност или
дистрибутивност по трите
аргумента!

(4) $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle \lambda u, v, w \rangle = \lambda \langle u, v, w \rangle = \langle u, v, \lambda w \rangle$$

" (коммутативность по трем аргументам)

$\langle u, \lambda v, w \rangle$

D-60 (1) $\langle v, u, w \rangle = \langle v \times u, w \rangle = \langle -u \times v, w \rangle = -\langle u \times v, w \rangle = -\langle u, v, w \rangle$

Нека спрямо пол. ориент. ортонорм. коорд. система

$$u(x_1, x_2, x_3), v(y_1, y_2, y_3), w(z_1, z_2, z_3)$$

Foraba $\langle w, v, u \rangle = \begin{vmatrix} z_1 & y_1 & x_1 \\ z_2 & y_2 & x_2 \\ z_3 & y_3 & x_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -\langle u, v, w \rangle$

Първото равенство също може да се докаже аналогично). Третото равенство също може да се получи аналогично, но изе използваме вече доказаните свойства

$$\langle u, v, w \rangle \stackrel{1-то}{=} -\langle w, u, v \rangle \stackrel{2-то}{=} \langle v, u, w \rangle \stackrel{1-то \text{ равенство}}{=} -\langle u, v, w \rangle$$

$$(2) \langle v, w, u \rangle \stackrel{(1)}{=} -\langle u, w, v \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle u, v, w \rangle$$

$$\Rightarrow \langle w, u, v \rangle = \langle u, v, w \rangle$$

от предидущее равенство

$$(3) \langle u' + u'', v, w \rangle = \langle (u' + u'') \times v, w \rangle = \langle u' \times v + u'' \times v, w \rangle = \underbrace{\langle u' \times v, w \rangle}_{\text{"}} + \underbrace{\langle u'' \times v, w \rangle}_{\text{"}} = \langle u', v, w \rangle + \langle u'', v, w \rangle$$

Другите две равенства се доказват аналогично (а може и от антисиметричността и първото равенство).

$$(4) \langle \lambda u, v, w \rangle = \langle (\lambda u) \times v, w \rangle = \langle \lambda \cdot u \times v, w \rangle = \lambda \langle u \times v, w \rangle = \lambda \langle u, v, w \rangle$$

Другите две равенства се доказват аналогично (или от горното равенство и антисиметричността)

Заб. Равенствата (3) и (4) заедно са еквивалентни на своите

$\langle \lambda' u' + \lambda'' u'', v, w \rangle = \lambda' \langle u', v, w \rangle + \lambda'' \langle u'', v, w \rangle$ (линейност по първия аргумент и също линейност по другите два аргумента)

$\Rightarrow$ смешаното произведение е линейно по трите аргумента (трilinearно)

Заб. Ако два от векторите съвпадат, то смешаното произведение е 0. Например, от антисиметричността, $\langle u, v, u \rangle = -\langle u, v, u \rangle \Leftrightarrow \langle u, v, u \rangle = 0$

Тв. 1 Нека $K = O, e_1, e_2, e_3$ е произволна афинна координатна система и спрямо нея векторите u, v, w имат координати $u(x_1, x_2, x_3), v(y_1, y_2, y_3), w(z_1, z_2, z_3)$. Тогава

$$\langle u, v, w \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

$$\underline{\text{Д-во}} \quad u = \sum_{i=1}^3 x_i e_i$$

$$v = \sum_{j=1}^3 y_j e_j$$

$$w = \sum_{k=1}^3 z_k e_k$$

$$\langle u, v, w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j, \sum_{k=1}^3 z_k e_k \right\rangle \overset{\text{трilinearност}}{=} \sum_{i,j,k=1}^3 x_i y_j z_k \langle e_i, e_j, e_k \rangle.$$

Ако измењују i, j, k има равни, то $\langle e_i, e_j, e_k \rangle = 0$ (от пр. 1)

Ако i, j, k су различити, то те са 1, 2, 3, но евентуално в друг ред
 $\Rightarrow \langle e_i, e_j, e_k \rangle = \pm \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$
тако,
(1) и (2)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle u, v, w \rangle &= (x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1) \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \end{aligned}$$

14.11.2018

10. ~~Задаване~~ Задаване на множество с уравнение и с параметрично уравнение

Работим в A_n , т.е. в пространството при $n=3$, в равнината при $n=2$ и в правината при $n=1$.

V_n - векторите в A_n

$K = 0e_1, \dots, e_n$ - афинна координатна система в A_n .

$B \subseteq A_n$ - произв. подмножество на A_n

Опр. Нека S е някакво множество и $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow S$. Ако $P(x_1, \dots, x_n) \in B \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$, то казваме, че $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ е уравнение на B спрямо K и пишем $B: f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$.

Зад 1) Нека $S \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^m$ и g е 0 или група константа.

В случая $S = \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ и $g = (g_1, \dots, g_m)$ и тогава

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = g_1 \\ \vdots \\ f_m = g_m \end{cases} \Rightarrow B: \begin{cases} f_1 = g_1 \\ \vdots \\ f_m = g_m \end{cases} \Rightarrow B \text{ се задава със система}$$

от m скалярни уравнения

2) В векторна има следното тривиално уравнение:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & P(x_1, \dots, x_n) \in B \\ 0, & P(x_1, \dots, x_n) \notin B \end{cases}$$

Тогава $B: f(x_1, \dots, x_n) = 1$ е уравнение за B

$$3) B: \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Ако всички $f_1, \dots, f_m$ са полиноми от степен $\leq d$, то B се нарича фигура от степен d или алгебрично множество от степен d .

4) Нека $B_i: f_i = g_i, i=1, \dots, m$ и нека $B = B_1 \cap \dots \cap B_m$. Тогава B се задава със системата

$$B: \begin{cases} f_1 = g_1 \\ \vdots \\ f_m = g_m \end{cases}$$

5) x_i може да се разглежда като функции:

$$x_i: A_n \rightarrow \mathbb{R}: P \mapsto x_i(P)$$

~~Ако~~ $f(x_1(P), \dots, x_n(P)) = g(x_1(P), \dots, x_n(P))$ е уравнение за

Точково множество

Опр. Нека Λ е някакво множество и $R = (R_1, \dots, R_n): \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ако $P(x_1, \dots, x_n) \in B \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda: x_1 = R_1(\lambda), \dots, x_n = R_n(\lambda)$, то казваме, че

$x_1 = R_1(\lambda), \dots, x_n = R_n(\lambda)$ са параметрични (скалярни) уравнения на B спрямо K . Тъй като

$$B: \begin{cases} x_1 = R_1(\lambda) \\ \vdots \\ x_n = R_n(\lambda) \end{cases}, \lambda \in \Lambda$$

Опр. Нека Λ е някакво множество и $\tilde{R}: \Lambda \rightarrow V_n$ е някакво изоб-
ражение. За $P \in A_n$ ozn. с r радиус-вектора спрямо K , т.е. $\vec{OP} = r$.

Ако $P \in B \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda: r = \tilde{R}(\lambda)$, то казваме, че $r = \tilde{R}(\lambda)$ е векторно параметрично уравнение на B спрямо K и тъй като $B: r = \tilde{R}(\lambda), \lambda \in \Lambda$

Заб. Векторното параметрично уравнение зависи само от нача-
лото O на координатната система, но не зависи от координат-
ния базис $(e_1, \dots, e_n)$.

Тв.1 Ако имаме векторно параметрично уравнение на B
по координатно, то получаваме скалярни параметрични урав-
нения спрямо K .

Всяка система скалярни параметрични уравнения спря-
мо B спрямо K се получава по този начин от някое векторно
параметрично уравнение на B спрямо K .

Д-во Тъй като P има коорд. $(x_1, \dots, x_n)$ спрямо $K \Leftrightarrow r = \vec{OP}$ има
коорд. $(x_1, \dots, x_n)$ спрямо K , т.е. $r = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Нека $B: r = \tilde{R}(\lambda), \lambda \in \Lambda$. Нека коорд на $\tilde{R}(\lambda)$ са $(R_1(\lambda), \dots, R_n(\lambda)) =: R(\lambda)$ 49

$$\Rightarrow \tilde{R}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$$

i -тата коорд. на $r \in \mathbb{R}^n$
 i -тата коорд. на $\tilde{R}(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ } $\Rightarrow r = \tilde{R}(\lambda)$ записамо по координати:

$$\begin{cases} x_1 = r_1 \\ \vdots \\ x_n = r_n \end{cases} \quad (*)$$

Трябва да докажем, че (*) са скалярни параметрични уравнения на B спрямо K .

$$r(x_1, \dots, x_n) \in B \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda: r = \tilde{R}(\lambda) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda: (i\text{-тата коорд. на } r) = (i\text{-тата коорд. на } \tilde{R}(\lambda)) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda: x_i = R_i(\lambda), i=1, \dots, n.$$

$\Rightarrow B$ има скал. парам. уравнения (*).

Сега ще докажем втората част на теоремата. Нека B има спрямо K уравнения (*). Нека $\tilde{R}(\lambda)$ е векторът с координати $(R_1(\lambda), \dots, R_n(\lambda))$, т.е. $\tilde{R}(\lambda) = R_1(\lambda)e_1 + \dots + R_n(\lambda)e_n \Rightarrow \tilde{R}: \Lambda \rightarrow V_n \Rightarrow$
 $\Rightarrow r(x_1, \dots, x_n) \in B \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda: x_i = R_i(\lambda), i=1, \dots, n. \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda: (i\text{-тата коорд. на } r) = (i\text{-тата коорд. на } \tilde{R}(\lambda)) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda: r = \tilde{R}(\lambda)$
 $\Rightarrow B$ има векторно параметрично уравнение $r = \tilde{R}(\lambda)$ и като го напишем по координати, получаваме (*).

11. Параметрични уравнения на права

$K = Oxyz$ - афинна коорд. система в пространството

Т-ма 1 Нека ℓ е права, т. $P_0 \in \ell$, а ненулевият вектор v е кол-иален с ℓ . Нека r_0 е радиус-векторът на P_0 спрямо K . Тогава ℓ има спрямо K векторно параметрично уравнение

$$\ell: r = r_0 + \lambda v, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Д-во Ако $P \in \ell \Rightarrow \overrightarrow{BP} \parallel \ell \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel v \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \overrightarrow{P_0P} = \lambda v.$

Обратно: ако $\overrightarrow{P_0P} = \lambda v \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel v \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel \ell \Rightarrow P \in \ell.$
 $\Rightarrow P \in \ell \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \overrightarrow{P_0P} = \lambda v.$



r - радиус вектор на $P \Rightarrow \vec{r_0 P} = r - r_0$

$\Rightarrow P \in l \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: r - r_0 = \lambda v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: r = r_0 + \lambda v$

$\Rightarrow l$ има спрямо K векторно параметрично уравнение $l: r = r_0 + \lambda v$.

Ако $r = r_0 + \lambda v = r_0 + \mu v \Rightarrow (\lambda - \mu)v = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu$

$\Rightarrow$ за разл. параметри ~~казваме~~ получаваме различни точки.

Т-ма 2 Нека l е права, т. $P_0 \in l$, ~~в-ра~~ в-ра $v \parallel l, v \neq \vec{0}$ и спрямо K т. P_0 и v имат координати $P_0(x_0, y_0, z_0), v(a, b, c)$. Тогава l има спрямо K скалярни параметрични уравнения

$$l: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Д-во От т-ма 1 l има вект. парам. уравнение $l: r = r_0 + \lambda v$.

$\Rightarrow$ скалярни параметрични уравнения се получават, като се вземат това по координатно!

$$P(x, y, z) \Rightarrow r(x, y, z)$$

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow r_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$(i\text{-тата коорд на } r_0 + \lambda v) = (i\text{-тата коорд. на } r_0) + \lambda (i\text{-тата коорд. на } v)$$

$\Rightarrow$ (1) написано по координатно е

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c, \end{cases}$$

т.е. това са скалярни параметрични уравнения на l спрямо K . (по тв.1 от предишния въпрос)

Сл. Всяка система от вида (2), когато $(a, b, c) \neq 0$, е система скалярни параметрични уравнения на някаква права спрямо K , а именно на правата l , определена от т. V_0 с коорд (x_0, y_0, z_0) и в-ра v с коорд (a, b, c)

Д-во Тъй като $(a, b, c) \neq \vec{0} \Rightarrow v \neq \vec{0} \Rightarrow$ по т-ма 2 (2) е система скалярни уравнения на въпросната l .

□

Т-ма 3 Нека разните точки P_0 и P_1 имат спрямо K коорд. $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогава правата, определена от P_0 и P_1 има спрямо K скалярно параметрично уравнение

$$P_0 P_1: \begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (3)$$

или эквив.

$$P_0 P_1: \begin{cases} x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \\ y = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \\ z = (1-\lambda)z_0 + \lambda z_1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (9)$$

zum exhib.

$$P_0 P_1: \begin{cases} x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \\ y = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 \\ z = \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 \end{cases}, \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad (5)$$

D-60

D-60
e se zadržava u P_0 u $v = \overrightarrow{P_0 P_1}$

$$\vec{v} \neq \vec{0}, \text{ тогда } p_0 \neq p_1$$
$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

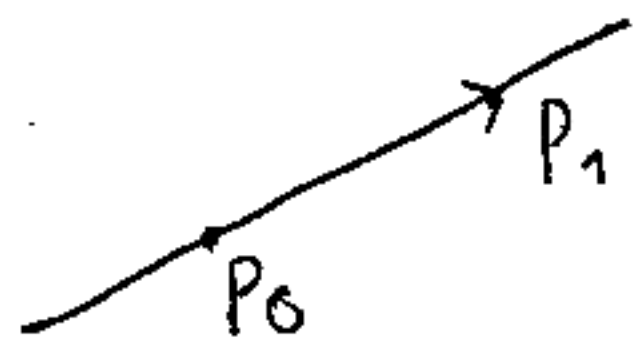
$\Rightarrow$ от т-ма 2 получаване ур. (3)

(4) очевидно е същото като (3)

(5) се получава от (4) като се вземе $\lambda_0 = 1 - \lambda, \lambda_1 = \lambda$ и обратно $\square$

Т-ма 4 Нека разгледаме т. P_0 и P_1 имат спрямо K коорд.

$P_0(x_0, y_0, z_0), P_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогава отворената отсечка P_0P_1 , затворена-
та отсечка P_0P_1 , отв. лъч $P_0P_1^{\rightarrow}$, затв. лъч $P_0P_1^{\rightarrow}$ имат спрямо K
същите уравнения (3) и (4), с единствената разлика, че $\lambda \in$ съотв.
 $(0, 1), [0, 1], (0, \infty), [0, \infty)$. А при (5) съотв. $\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0; \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0; \lambda_1 > 0; \lambda_1 \geq 0$.



Д-во

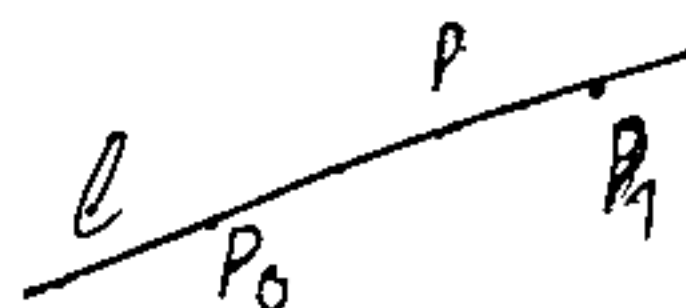
$$P \in \ell \Leftrightarrow \vec{P_0 P} = \lambda \vec{v} = \lambda \vec{P_0 P_1}$$

$$\neq P \in \text{отв. открито } \vec{P_0 P_1} \Leftrightarrow \lambda \in (0, 1)$$

$$\neq P \in \text{затв. отк. } P_0 P_1 \Leftrightarrow \lambda \in [0, 1]$$

$$\neq P \in \text{отв. отв. } P_0 P_1 \Leftrightarrow \lambda > 0$$

$$\neq P \in \text{затв. отв. } P_0 P_1 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$$



Зад. Велика велика в равнината като се махне просто третата координата.

12. Общо уравнение на права в равнината

$k = Oxy$ - афимна коорд. система в равнината

1. Общо уравнение

Опр. Общо уравнение на правата ℓ спрямо k е уравнение на ℓ спрямо k , което има вида $Ax + By + C = 0$.

Зад. Ако правата ℓ има спрямо k уравнение $Ax + By + C = 0$, то $(A, B) \neq 0$, защото:

Да допуснем, че $(A, B) = \vec{0}$.

$\Rightarrow$ ур. е $C = 0$. Тогава или имаме $C \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ това е уравнение на $\emptyset$, а не на права или $C = 0 \Rightarrow$ ур. е $0 = 0$.

Тождество $\Rightarrow \forall x, y$ е реш. $\Rightarrow$ това е уравнение на цялата равнина, а не на права

$\Rightarrow (A, B) \neq \vec{0}$, т.е. уравнението е от първа степен.

Т-ма 1 1) Всяка права ℓ в равнината има спрямо k общо уравнение

2) Обратно: Всяко уравнение от вида $Ax + By + C = 0$, където $(A, B) \neq \vec{0}$, е уравнение ~~на правата~~ спрямо k на някаква права т.е. общо уравнение

Д-во Нека $P_0(x_0, y_0) \in \ell$, $\forall$ -т $v(a, b) \parallel \ell$,

$$P(x, y) \in \ell \Leftrightarrow \vec{P_0 P} \parallel v \Leftrightarrow \det \text{ от коорд на } \vec{P_0 P} \text{ и } v = 0.$$

$$P_0 P(x-x_0, y-y_0) \Rightarrow P(x, y) \in \ell \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x-x_0 & a \\ y-y_0 & b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow b(x-x_0) - a(y-y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow bx - ay + (-bx_0 + ay_0) = 0$$

Озн. $A=b, B=-a, C=-bx_0+ay_0 \Rightarrow P(x, y) \in \ell \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$

$\Rightarrow \ell: Ax + By + C = 0$, т.е. ℓ има общо уравнение

2) Нека имаме $Ax + By + C = 0, (A, B) \neq \vec{0}$. Това уравнение има решение, защото:

ако $A \neq 0$, то уравнението е еквивалентно на

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A} \text{ и това има решение (напр. } y=0, x = -\frac{C}{A}).$$

Ако $A=0$, то $B \neq 0$ и аналогично пак има решение.

Нека (x_0, y_0) е едно решение $\Rightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0 \Rightarrow C = -Ax_0 - By_0$.

Нека P_0 е точката с коорд. (x_0, y_0) . Нека $a = -B, b = A$ ^{и $v \in$} векторът с коорд. (a, b) . Той като $(A, B) \neq \vec{0}$, то $(a, b) \neq \vec{0} \Rightarrow v \neq \vec{0}$. Нека ℓ е правата, определена от т. P_0 и v -ра v .

$\Rightarrow$ от д-вото на 1)

$$\ell: bx - ay + (-bx_0 + ay_0) = 0$$

$$\Rightarrow \ell: Ax + By + \underbrace{(-Ax_0 - By_0)}_C = 0$$

$$\Rightarrow \ell: Ax + By + C = 0 \Rightarrow \ell \text{ има исканото уравнение}$$

Т-ма 2 1) Нека т. P_0 и ненулевият вектор v имат спрямо К коорд. $P_0(x_0, y_0), v(a, b)$. Тогава правата ℓ , минаваща през P_0 и $\parallel v$, има спрямо К общо уравнение

$$\ell: \begin{vmatrix} x-x_0 & a \\ y-y_0 & b \end{vmatrix} = 0$$

2) Нека разл. точки P_0 и P_1 имат спрямо К координати $P_0(x_0, y_0)$ и $P_1(x_1, y_1)$. Тогава правата P_0P_1 има спрямо К общо уравн. 54

$$l: \begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

или эквив.

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Д-во

1) Това го виждаме в д-вото на 1) на т-ма 1.

2) $\overrightarrow{P_0 P_1}$
 $P_0, v = \overrightarrow{P_0 P_1} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$
 $\begin{matrix} \text{"a"} & \text{"b"} \end{matrix}$

Тогава от 1) получавме първото уравнение.

Второто уравнение $\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_0 & x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_0 & y_1 - y_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

$\begin{matrix} \xrightarrow{(-1)} & \xrightarrow{(-1)} \end{matrix}$

$$= - \begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

Т-ма 3 Нека правата l има уравнение $Ax + By + C = 0$. Тогава:

1) В-рот $n(-B, A)$ е перпендикулярен и коллинеарен с l

2) В-рот $v(a, b)$ е коллинеарен с $l \Leftrightarrow Aa + Bb = 0$

Д-во

1) Това го виждаме в д-вото на (2) на т-ма 1.

2) $v \parallel l \Leftrightarrow v \perp n \Leftrightarrow \det \begin{vmatrix} a & -B \\ b & A \end{vmatrix} = 0$

21.11.2018

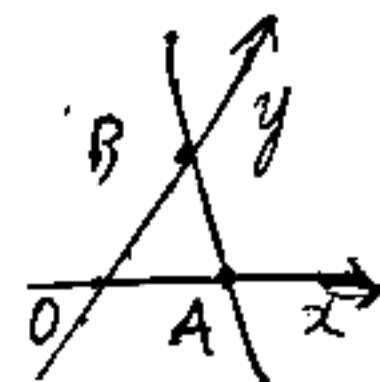
Смятаме, че имаме фиксирана афинна координатна система $K = Oxy$.

2. Отрезково уравнение

~~Нека~~ Нека l е права $O \notin l$. Нека $A = l \cap O_x$, $B = l \cap O_y \Rightarrow$
 $\Rightarrow A(a, 0), B(0, b)$

$a \neq 0$, защото $A \neq O$ и $b \neq 0$, защото $B \neq O$.

$A \neq B$, защото иначе $A = B = O \in l$.



$\Rightarrow l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, защото A и B удовлетворяват това уравнение

$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ е общо уравнение на правата $AB = l$.

Опр. Уравнение на права l от вида $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ се нарича

отрезково уравнение на l спрямо K .

3. Декартово уравнение

Нека l е права, която не е успоредна на O_y . Нека $l: Ax + By + C = 0$. Тогава $B \neq 0$, защото ако $B = 0$, тогава за $e_2(0, 1)$
 $\Rightarrow A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0 \Rightarrow e_2 \parallel l \Rightarrow O_y \parallel l$, което е противоречие $\Rightarrow B \neq 0$.

$\Rightarrow l: y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Опр. $k = -\frac{A}{B}$ и $m = -\frac{C}{B}$. Тогава $l: y = kx + m$.

Опр. Уравнение на права l спрямо K от вида $y = kx + m$ се нарича декартово уравнение на l спрямо K .

k се нарича углов коефициент на l спрямо K .

Нека $v(a, b) \parallel l$, $v \neq \vec{0}$. $l: -kx + y - m = 0$ - общо уравнение.

$v \parallel l \Rightarrow -ka + b = 0 \Rightarrow b = ka \Rightarrow k = \frac{b}{a}$. Не може $a = 0$, защото

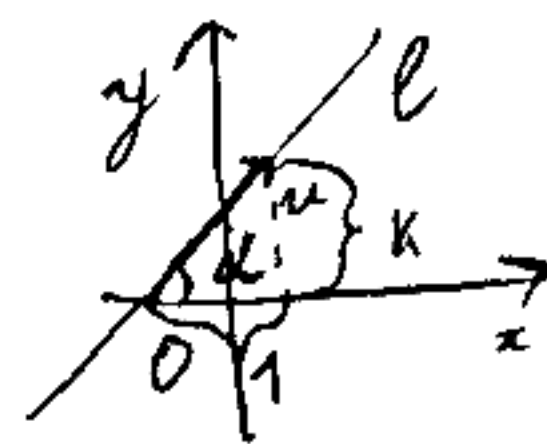
ако $a = 0$, то $b = k \cdot a = 0 \Rightarrow v = \vec{0}$.

Нека K е ортонормирана. Нека $d = d(O_x, l)$, където K е перпендикулярен на l , който седи в полуправината $y > 0$.

Векторът $u(1, k) \parallel \ell$.

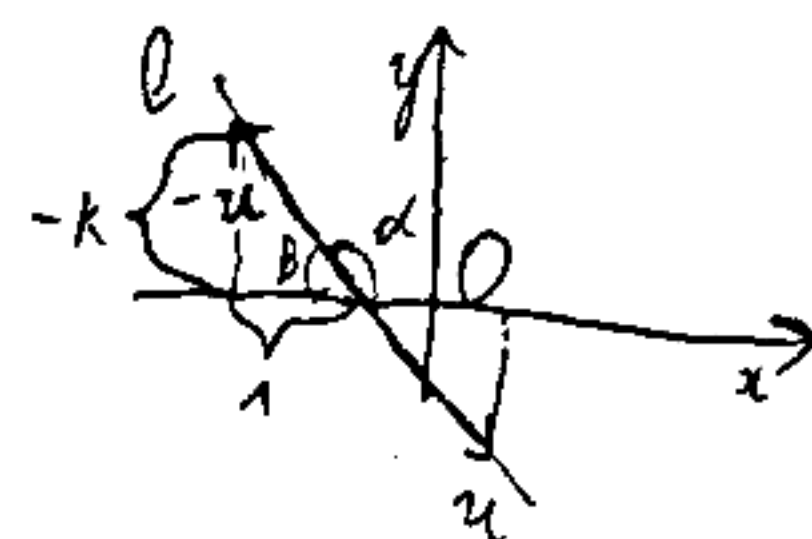
Ако $k > 0$, то $u \uparrow \uparrow \ell$ и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{1} = k$$

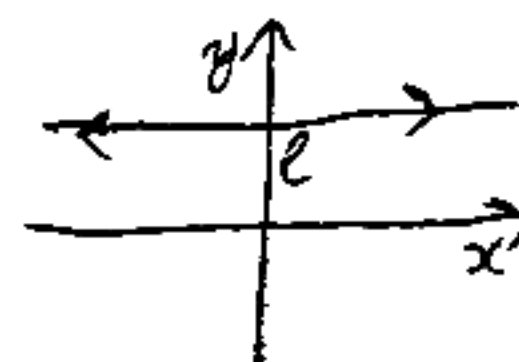


Ако $k < 0$, то $u \uparrow \uparrow -u(-1, -k)$ и

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{-k}{1} = k$$



Ако $k = 0$, няма значение кой от β и $\pi - \beta$ е взимаме, защото винаги ще бъде 0 или π ($\ell \parallel O_x \Rightarrow \alpha = \angle(O_x, \ell) \in \{0, \pi\}$ и $\operatorname{tg} \alpha = 0 = k$)



13. Взаимно положение на две прави в равнината

Считаме, че $K = Oxy$ е фикс. афинна коорд. система.

Т-ма 1 Нека правите ℓ_1 и ℓ_2 имат спрямо K общи уравнения

$$\ell_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$\ell_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Означаваме

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}. \text{ Тогава}$$

$$1) \ell_1 = \ell_2 \Leftrightarrow \operatorname{rank} \tilde{A} = 1 \quad (\Rightarrow \operatorname{rank} A = 1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{aligned} A_2 &= \lambda A_1 \\ B_2 &= \lambda B_1 \\ C_2 &= \lambda C_1 \end{aligned}$$

Автоматично $\lambda \neq 0$.

$$2) \ell_1 \parallel \ell_2, \text{ но } \ell_1 \neq \ell_2 \Leftrightarrow r(A)=1 \text{ и } r(\tilde{A})=2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \begin{aligned} A_2 &= \lambda A_1 \\ B_2 &= \lambda B_1 \\ C_2 &\neq \lambda C_1 \end{aligned}$$

Автоматично $\lambda \neq 0$.

$$3) \ell_1 \text{ и } \ell_2 \text{ са пресекателни} \Leftrightarrow r(A)=2 \text{ (и } \Rightarrow \text{ и } r(\tilde{A})=2) \Leftrightarrow \begin{aligned} \exists \lambda \in \mathbb{R}: A_2 &= \lambda A_1 \\ B_2 &= \lambda B_1 \\ C_2 &= \lambda C_1 \end{aligned} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Заб. В т-ма 1. можем да заменим 1) по еквивалентен начин като

Т-ма 2 Нека правата ℓ има спрямо K общо уравнение $Ax + By + C = 0$. Тогава всевъзможните общи уравнения на ℓ спрямо K са уравненията от вида $\lambda(Ax + By + C) = 0$, където $\lambda \neq 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Заб. След няколко въпроса ще бъде доказана аналогична теорема за равнини в пространството и затова препоръчвам доказателството

14. Полуравнини

$K = Oxy$ - афинна коорд. система в равнината.

Т-ма 1 Нека правата ℓ има спрямо K общо уравнение $Ax + By + C = 0$. Озн. $F(x, y) = Ax + By + C$. Нека P_0 и P_1 имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0)$ и $P_1(x_1, y_1)$. Тогава
1) P_0 и P_1 са от различни отворени полуравнини отн. ℓ
 $\Leftrightarrow F(x_0, y_0) F(x_1, y_1) < 0$ (т.е. когато $F(x_0, y_0)$ и $F(x_1, y_1)$ имат различни знаци)

2) P_0 и P_1 са от една и съща отворена полуравнина отн. ℓ
 $\Leftrightarrow F(x_0, y_0) F(x_1, y_1) > 0$ (т.е. когато $F(x_0, y_0)$ и $F(x_1, y_1)$ имат ^{еднакви} знаци).

За затворени полуравнини важат ищите неща, но с нестроги неравенства, т.е. ≤ 0 и ≥ 0 .

2-во. (на Т-ма 1)

За P_0 и P_1 имаме следните три взаимноизключващи се възможности:

- (а) P_0 и P_1 са от различни отворени полуравнини
- (б) P_0 и P_1 са от една и съща отворена полуравнина
- (в) Поне една от P_0 и P_1 е в-ху ℓ .

За $F(x_0, y_0) F(x_1, y_1)$ имаме следните три взаимноизкл. възможности:

- (а') $F(x_0, y_0) F(x_1, y_1) < 0$
- (б') $F(x_0, y_0) F(x_1, y_1) > 0$
- (в') $F(x_0, y_0) F(x_1, y_1) = 0$

Ако е, че $P_0 \in \ell \Leftrightarrow F(x_0, y_0) = 0$ и $P_1 \in \ell \Leftrightarrow F(x_1, y_1) = 0 \Rightarrow$ поне една от P_0 и P_1 е в-ху $\ell \Leftrightarrow$ поне едно от $F(x_0, y_0)$ и $F(x_1, y_1) \in 0$
 $\Leftrightarrow F(x_0, y_0) F(x_1, y_1) = 0$

$\Rightarrow$ в съответства на в')

$\Rightarrow$ ако знаем 1), т.е. $a \Leftrightarrow a'$, то показваме, че $\delta \Leftrightarrow \delta'$. А и обратно, $2) \Rightarrow 1)$ - аналогично. Тоест $1) \Leftrightarrow 2)$

Затворена полуравнина = отворена полуравнина $\cup$ правата.

Различни затворени полуравнини е (а) или (б), а за произведението ≤ 0 е (а') или (б'). Ако сме доказали вече

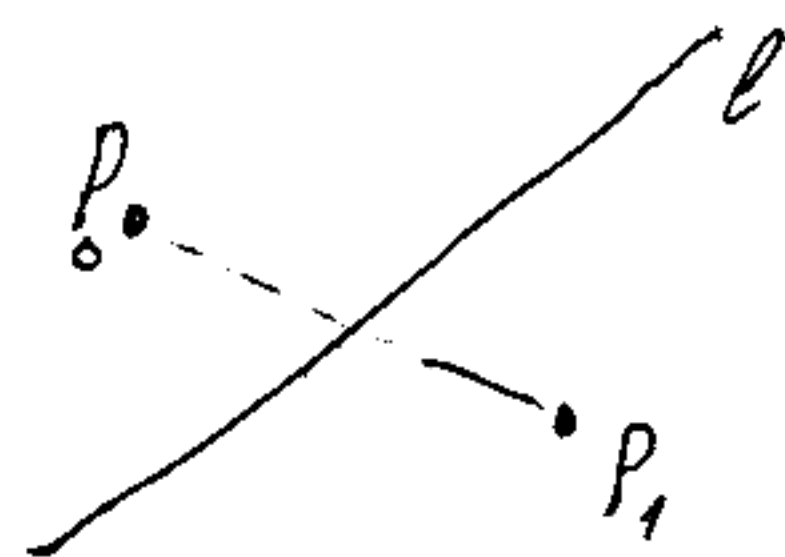
1) и $\Rightarrow$ 2), то следва, че (а) или (б) $\Leftrightarrow$ (а') или (б').

Това е твърдението за различни затворени полуравнини.
Аналогично $(\delta) \text{ или } (B) \Leftrightarrow (\delta') \text{ или } (B')$, т.е. твърд. за еднакви
затворени полуравнини $\Rightarrow$ достатъчно е да докажем 1)

P_0 и P_1 са от ~~различни~~ различни полуравнини

$\Leftrightarrow$ отв. отсечка P_0P_1 пресича l .

отв. отс. P_0P_1 :
$$\begin{cases} x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \\ y = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \end{cases}, \lambda \in (0,1)$$



$l: F(x,y)=0$

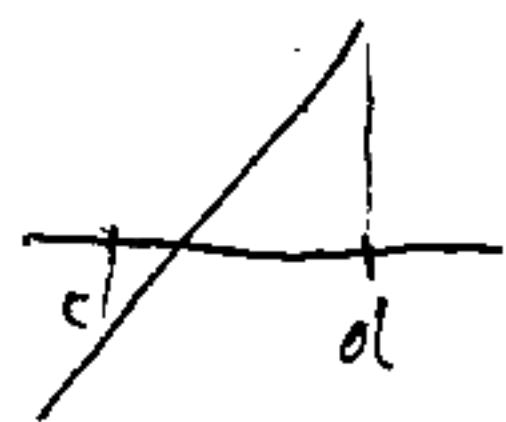
$\Rightarrow$ отв. отсечка P_0P_1 пресича $l \Leftrightarrow \exists \lambda \in (0,1): F((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1, (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1) = 0$

$$\begin{aligned} F((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1, (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1) &= A((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) + B((1-\lambda)y_0 + \lambda y_1) + C = \\ &= (1-\lambda)(Ax_0 + By_0 + C) + \lambda(Ax_1 + By_1 + C) = (1-\lambda)F(x_0, y_0) + \lambda F(x_1, y_1) = \\ &= (F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0))\lambda + F(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Лема 1 Нека $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $c < d$. Нека $f(\lambda) = a\lambda + b$. Тогава
уравнението $f(\lambda) = 0$ има решение в $(c, d) \Leftrightarrow f(c)f(d) < 0$ или
 $f \equiv 0$ (т.е. $a = b = 0$).

До-во (на т-ма 1, прогнатиране)

Тук нека $f(\lambda) = (F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0))\lambda + F(x_0, y_0)$,



а $(c, d) = (0, 1)$. Има уравнението $(F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0))\lambda + F(x_0, y_0) = 0$
има решение $\lambda \in (0, 1) \Leftrightarrow f(0)f(1) < 0$, или $f \equiv 0$, т.е.

$F(x_0, y_0)F(x_1, y_1) < 0$ или $f \equiv 0$. Но $f \equiv 0$ не е възможно, защото
тогава $F(x_0, y_0) = 0$ - противоречие, защото $P_0 \notin l$. (защото ако
са от разл. полуравнини $\Rightarrow P_0 \notin l$, а ако $F(x_0, y_0)F(x_1, y_1) < 0 \Rightarrow F(x_0, y_0) \neq 0$
 $\Rightarrow P_0 \notin l$)

$\Rightarrow P_0$ и P_1 са от разл. отв. полуравнини отн. $\ell \Leftrightarrow F(x_0, y_0) F(x_1, y_1) < 0$ $\square$

Сл. 1 Нека правата ℓ има спрямо K общо уравнение $Ax + By + C = 0$.
Отн. $F(x, y) = Ax + By + C$. Тогава двете отворени полуравнини отн.
 ℓ са множествата ~~$\{P(x, y) : F(x, y) > 0\}$~~ $\{P(x, y) : F(x, y) > 0\}$ и $\{P(x, y) : F(x, y) < 0\}$,
а затв. полуравнини са обиколите, но $C \geq 0$ и ≤ 0 .

Д-во $P_0 \notin \ell$.

Двете отв. полуравнини са : тази, в която е P_0 ,
и другата. И те се състоят от точките, $P(x, y)$,
за които $F(x, y)$ има съотв. същия знак като $F(x_0, y_0)$ и
съотв. ~~$F(x_1, y_1)$~~ противоположен знак на $F(x_1, y_1)$, т.е. двете
множества от формулировката. Затова полуравн. = отв. полуравн. $\vee$,
а $P \in \ell \Leftrightarrow F(x, y) = 0 \Rightarrow$ затв. полуравнини са обиколите, но с нестроги
неравенства. $\square$

15. Нормално уравн. на права в равнината

Опр. Нека ℓ е права в равнината. Всеки вектор, който е
перпендикулярен на ℓ (т.е. е перпендикулярен на колитеар-
ните с ℓ вектори) се ~~нарича~~ нарича нормален за ℓ вектор

Нека $K = Oxy$ е ~~ортоном.~~ ортонорм. коорд. система.

Т-ма 1 Нека правата ℓ има спрямо K общо уравнение
 $Ax + By + C = 0$. Тогава N с коорд. (A, B) спрямо K е нормален
вектор за ℓ .

Д-во $N \neq \vec{0}$, т.к. $(A, B) \neq \vec{0}$.

N е норм. за $\ell \Leftrightarrow N \perp v$ за някой ненулев вектор $v, v \parallel \ell$.

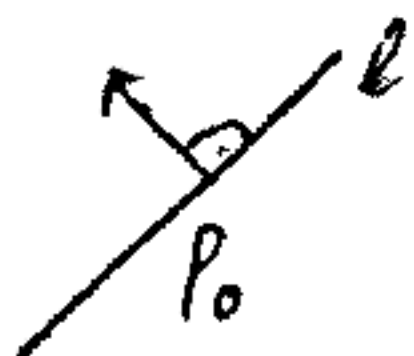
Имаме $v(-B, A) \parallel \ell, v \neq \vec{0}$. $N \perp v \Leftrightarrow \langle N, v \rangle = 0$

$\langle N, v \rangle = A(-B) + B \cdot A = 0 \Rightarrow N \perp v$, т.е. N е нормален за ℓ . $\square$

Т-ма 2 Нека точката P_0 и ненулевият вектор N имат спрямо K координати $P(x_0, y_0)$, $N(A, B)$. Тогава правата ℓ през P_0 , която е перпендикулярна на N , има спрямо K общо уравнение

$$\ell: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Д-во ℓ е еднозначно определена от т. P_0 и N

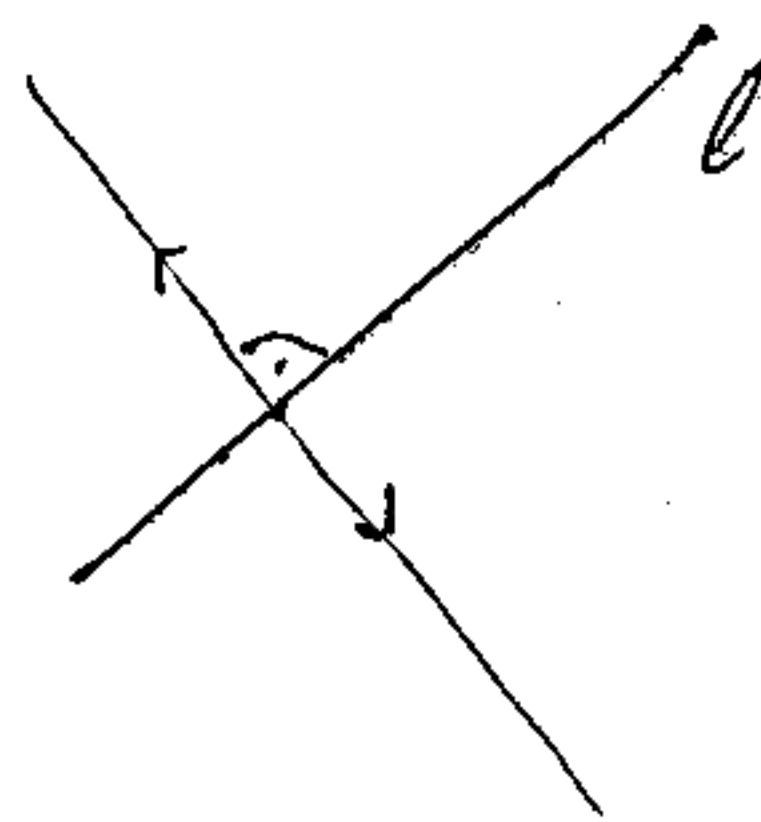


Нека m е правата с уравнение $m: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Това е общо уравнение на права, защото $(A, B) \neq \vec{0}$, защото $N \neq \vec{0}$. $P_0 \in m$ (зр. $A(x_0 - x_0) + B(y_0 - y_0) = 0$). N е нормален за m по т-ма 1. Следователно $m = \ell$. $\square$

Всяка права ℓ очевидно има точно два единични нормални вектора.

Ако $N(A, B)$ е ненулев нормален вектор, то единичните нормални вектори са:

$$n = \frac{N}{|N|} \text{ и } -n, \text{ т.е. } n \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) \text{ и } -n \left(\frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$



Опр. Общо уравнение спрямо K на правата ℓ , в което нормалният вектор с коорд. коеф. пред x и y е единичен, се нарича нормално уравнение на ℓ спрямо K , т.е. уравн. $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ е нормално $\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Т-ма 3 Всяка права ℓ в равнината има спрямо K точно две нормални уравнения. Ако $Ax + By + C = 0$ е едно ур. на ℓ спрямо K , то двете норм. уравнения са $\pm \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$.

Д-во Взабързваемостта общи уравнения на ℓ са $\lambda(Ax + By + C) = 0$, $\lambda \neq 0$, т.е. $(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C) = 0$. Това уравнение е нормално $\Leftrightarrow (\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2(A^2 + B^2) = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow$ норм. уравн. са две, а именно тези от формулировката.

Приметения на норм. ур.

1) Разглеждаме от точка до права

Т-ма 4 Нека правата ℓ има спрямо K норм. уравнение $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, а т. P_0 има спрямо K коорд. (x_0, y_0) . Озн.

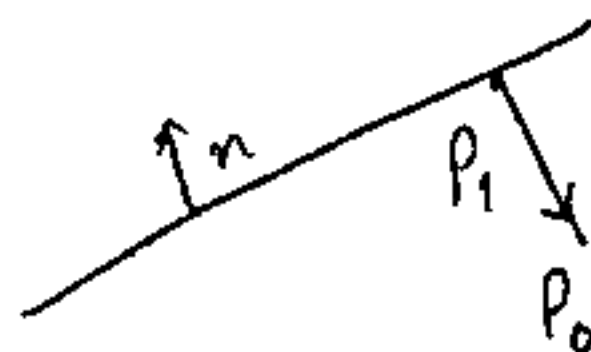
$F(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$. Тогава разстоянието $d(P_0, \ell)$ от P_0 до ℓ е $d(P_0, \ell) = |F(x_0, y_0)|$.

Д-во Нека $n(\alpha, \beta)$ - това е единичен нормален за ℓ вектор.

През P_0 построяваме правата $m: m \perp \ell$. Нека $P_1(x_1, y_1) = m \cap \ell$.

$$d(P_0, \ell) = |P_0 P_1|.$$

$$\text{Векторът } \overrightarrow{P_1 P_0} \parallel n \Rightarrow \overrightarrow{P_1 P_0} = \lambda n \Rightarrow d(P_0, \ell) = |\overrightarrow{P_1 P_0}| = |\lambda n| = |\lambda| |n| = |\lambda|.$$



$$\overrightarrow{P_1 P_0} = \lambda n \Rightarrow \begin{cases} x_0 - x_1 = \lambda \alpha \\ y_0 - y_1 = \lambda \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \lambda \alpha$$

$$y_1 = y_0 - \lambda \beta$$

$$P_1 \in \ell \Rightarrow F(x_1, y_1) = 0$$

$$\Rightarrow F(x_0 - \lambda \alpha, y_0 - \lambda \beta) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(x_0 - \lambda \alpha) + \beta(y_0 - \lambda \beta) + \gamma = 0$$

$$-\lambda(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{F(x_0, y_0)}{\alpha^2 + \beta^2} \Rightarrow d(P_0, \ell) = |F(x_0, y_0)|$$

Зад. Изчислете $\delta(P_0, \ell) = F(x_0, y_0)$ се нарича ориентирано разстояние от P_0 до ℓ по норм. в-ръ n . ($\delta(P_0, \ell) = \lambda$ от горн.).

$\delta(P_0, \ell) > 0 \Leftrightarrow P_0$ е в знака отв. полуравни, в която сочи n

$\delta(P_0, \ell) < 0 \Leftrightarrow P_0$ — — —, в която сочи $-n$.

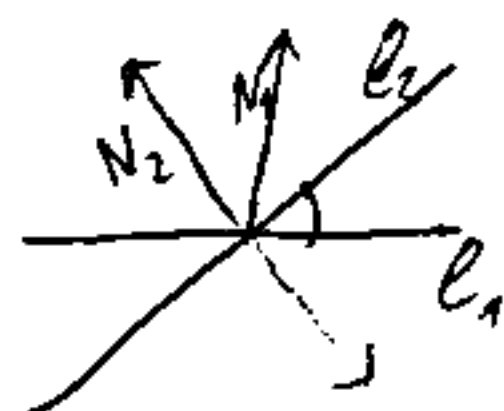
$(\delta(P_0, \ell) = 0 \Leftrightarrow P_0 \in \ell)$

2) Ъгъл между две прави

Ъгълът между две прави ℓ_1 и ℓ_2 се определя по-малкият от двата ъгъла, които сключват

Нека N_1 и N_2 са нормални вектори за ℓ_1 и ℓ_2

$$\varphi(\ell_1, \ell_2) = \begin{cases} \varphi(N_1, N_2), & \text{когато } \varphi(N_1, N_2) \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \varphi(N_1, N_2), & \text{когато } \varphi(N_1, N_2) \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



~~Нека $\ell_1: d_1x + \beta_1y + \gamma_1 = 0$ и $\ell_2: d_2x + \beta_2y + \gamma_2 = 0$ са норм. ур.~~

$$\Rightarrow \cos \varphi(\ell_1, \ell_2) = \begin{cases} \cos \varphi(N_1, N_2) & \text{за } \varphi(N_1, N_2) \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos \varphi(N_1, N_2) & \text{за } \varphi(N_1, N_2) \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi(\ell_1, \ell_2) = |\cos \varphi(N_1, N_2)|$$

$$\text{Нека } \ell_1: d_1x + \beta_1y + \gamma_1 = 0$$

$$\ell_2: d_2x + \beta_2y + \gamma_2 = 0$$

са норм. ур.

$n(d_1, \beta_1)$, $n(d_2, \beta_2)$ — единични нормални вектори за ℓ_1 и ℓ_2 .

$$\Rightarrow \cos \varphi(\ell_1, \ell_2) = |\cos \varphi(n_1, n_2)| = \left| \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{|n_1| |n_2|} \right| = |\langle n_1, n_2 \rangle| = |d_1d_2 + \beta_1\beta_2|$$

$$\Rightarrow \varphi(\ell_1, \ell_2) = \arccos |d_1d_2 + \beta_1\beta_2|$$

28.11.2018 16. Параметрично уравнение на равнина

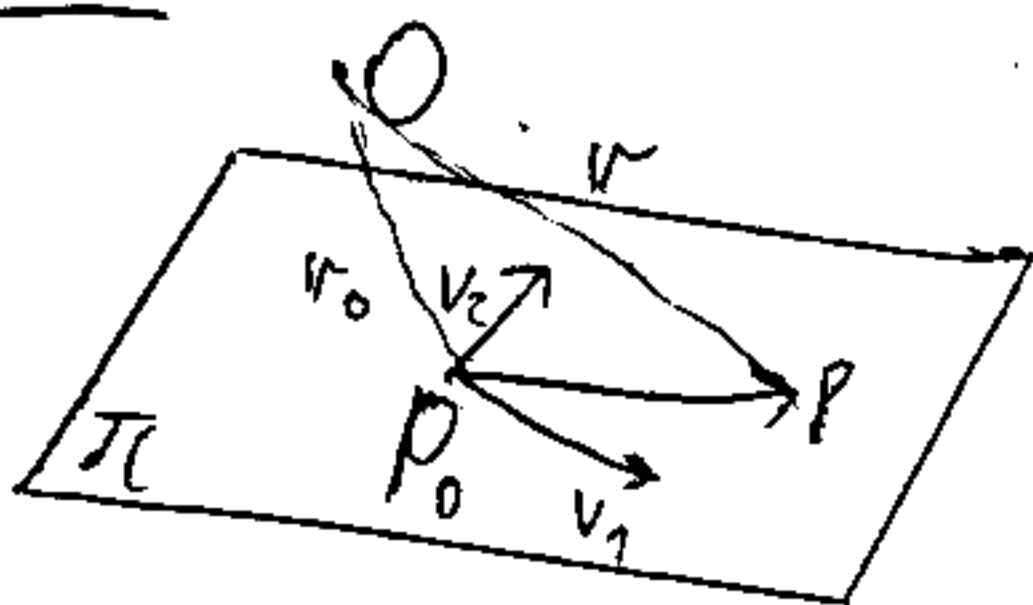
$K = Oxyz$ - афинна коорд. система

Т-ма 1 Нека π е равнина, т. $P_0 \in \pi$, а неколинеарните вектори v_1 и v_2 са колинеарни с π . Озн. с r_0 радиус-вектора на P_0 отн. K .

Товава π има спрямо K векторно параметрично уравнение

$$r = r_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Д-во



Тоу като $P_0 \in \pi$, то т. $P \in \pi \Leftrightarrow \vec{P_0P} \parallel \pi$.

$\Leftrightarrow \vec{P_0P}, v_1, v_2$ са колинеарни.

$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: \vec{P_0P} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, защото v_1 и v_2 не са колинеарни.

$$r = \vec{OP}, r_0 = \vec{OP_0} \Rightarrow \vec{P_0P} = r - r_0 \Rightarrow P \in \pi \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: r - r_0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: r = r_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \Rightarrow \pi$ има спрямо K векторно параметрично уравнение $r = r_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Т-ма 2 Нека π е равнина, т. $P_0 \in \pi$, а неколинеарните вектори v_1 и v_2 са колинеарни с π . Нека координатите спрямо K на P_0, v_1, v_2 са $P_0(x_0, y_0, z_0), v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$. Товава π има спрямо K скалярни параметрични уравнения

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ y = y_0 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ z = z_0 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \end{cases}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Д-во Имаме, че $P_0(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow r_0 = \vec{OP_0}$ има коорд (x_0, y_0, z_0) . Аналог. за $P(x, y, z)$ имаме $r(x, y, z)$.

Скалярни параметрични уравнения се получават като се напише векторно параметрично уравнение координатно
 $\Rightarrow$ пишем (1) координатно и получаване (2). $\square$

Ц.1 Ако в уравнението (2) векторите $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ са лин. независими, то (1) представлява параметрично уравнение на равн. Т. прех. Т. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна с векторите $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$ (координатите са отн. К).

D-во

Ако $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ са лин. независими, то векторите v_1 и v_2 са неколлинеарни. $\Rightarrow$ Т. P_0 и v_1, v_2 задават равнина и по Т-ма 2 уравнения са (2).

Т-ма 3 Нека неколинеарните точки P_0, P_1, P_2 имат спрямо К коорд. $P_i(x_i, y_i, z_i), i=0,1,2$. Тогава равн. π , определена от P_0, P_1, P_2 , има спрямо К парам. уравнения

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1(x_1 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda_1(y_1 - y_0) + \lambda_2(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda_1(z_1 - z_0) + \lambda_2(z_2 - z_0) \end{cases} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad (3)$$

или еквив.

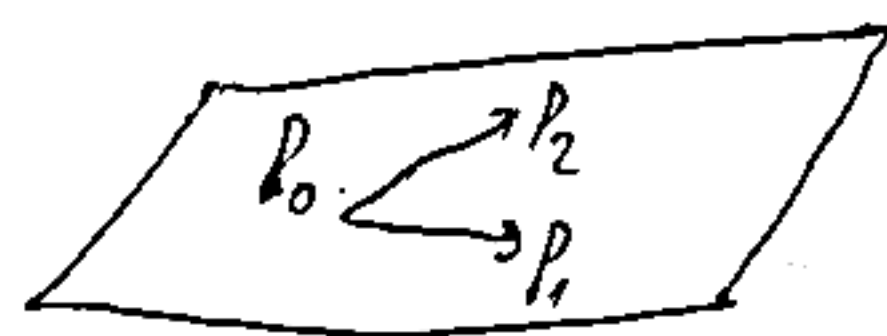
$$\pi: \begin{cases} x = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ z = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{cases}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad (4)$$

или еквив.

$$\pi: \begin{cases} x = \lambda x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \\ y = \lambda y_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ z = \lambda z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{cases} \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (5)$$

Д-во π се задава от т. P_0 и некомпланарните вектори $v_1 = \vec{P_0 P_1}$ и $v_2 = \vec{P_0 P_2}$

$$\vec{P_0 P_1} (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \\ \begin{matrix} "a_1" & "b_1" & "c_1" \end{matrix}$$



$$\vec{P_0 P_2} (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0) \\ \begin{matrix} "a_2" & "b_2" & "c_2" \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ от (2) в Т-ма 2 уравнение, че π има уравнение (7).

(4) след. е (3)

(5) се получава като в (4) поемем $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$.

17. Общо уравнение на равнината

$K = Oxyz$ - афинна коорд. система

Опр. Общо уравнение на равнината π спрямо K се нарича уравнение на π спрямо K от вида $Ax + By + Cz + D = 0$.

Заб. Ако равнината π има уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ спрямо K , то $(A, B, C) \neq \vec{0}$, защото:

Ако допуснем, че $(A, B, C) = \vec{0}$, то уравн. става $D = 0$. Ако $D \neq 0$, то ур. $D = 0$ няма решение $\Rightarrow$ то е уравнение на $\emptyset$, а не на равнина. Ако пак $D = 0$, то уравнението е $0 = 0$ и координатите на всяка точка го удовлетворяват, и $\Rightarrow$ то е уравнение на цялото пространство, а не на равнина. 67

$$\Rightarrow (A, B, C) \neq \vec{0}.$$

Т-ма 1

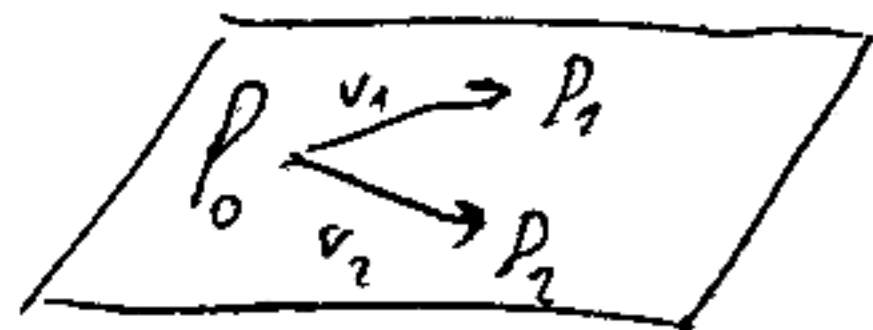
1) Всяка равнина π има спрямо K някое общо уравнение

2) Обратно: всяко уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq \vec{0}$, е уравнение спрямо K на някаква равнина π (т.е. общо уравнение на π).

Д-во

1) Нека $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, а векторите $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$ са некалкуларни и са $\parallel \pi$

Тогава в д-вото на т-ма 1 от предишния въпрос $\Rightarrow P(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \vec{P_0P}, v_1, v_2$ са коллинеарни.



Имаме $\vec{P_0P}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

$$P(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \vec{P_0P}, v_1, v_2 \text{ са коллинеарни} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2 \\ y-y_0 & b_1 & b_2 \\ z-z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

коорд на $\vec{P_0P}$ на v_1 на v_2

$$\Leftrightarrow (x-x_0) \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (y-y_0) \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + (z-z_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Означаваме $A = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ (*)

$$\Rightarrow P(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0.$$

$$\Rightarrow \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \text{ спрямо } K.$$

2) Нека е дадено $Ax + By + Cz + D = 0$, $(A, B, C) \neq \vec{0}$. Уравнението винаги има решение, защото:

Нека $\overline{Ax=0}$. ^{напримр. д.о.о.} Тогава уравнението е еквивалентно на

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z - \frac{D}{A} \text{ и това има решение, напр. } x = -\frac{D}{A}, y=0, z=0.$$

Нека (x_0, y_0, z_0) е едно решение, т.е. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

$$\Rightarrow D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Нека т. P_0 има координати (x_0, y_0, z_0) .



Търсим a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 , които да удовлетворяват (*)

$$\text{Нека } b_1 = A, c_1 = 1, b_2 = 0, c_2 = 0,$$

$$a_1 = -B, a_2 = -\frac{C}{A}$$

Нека v_1 и v_2 са векторите с координати (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) , т.е. $v_1(-B, A, 0)$ и $v_2(-\frac{C}{A}, 0, 1)$. v_1 и v_2 са неколинеарни, защото матрицата от координатите им има ранг 2, защото минорите ѝ са A, B и C (от (*)). и поне едно от $A, B, C \neq 0$ (в нашия случай е A).

$\Rightarrow$ т. P_0 и в-рите v_1 и v_2 задават равнина Π . В 1) видяваме, че Π има уравнение

$$(x-x_0) \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (y-y_0) \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + (z-z_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{т.е. } Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_D = 0, \text{ т.е. ур. } Ax + By + Cz + D = 0.$$

Т-ма 2 1) Нека т. P_0 и неколинеарните вектори v_1 и v_2 имат спрямо К координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v_1(a_1, b_1, c_1)$, $v_2(a_2, b_2, c_2)$. Тогава равнината Π , определена от P_0, v_1, v_2 , има спрямо К общо

уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2 \\ y-y_0 & b_1 & b_2 \\ z-z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

2) Нека некаквиерните точки P_0, P_1 и P_2 имат прямо K координати $P_i(x_i, y_i, z_i)$. Тогава равн. π , определена от P_0, P_1, P_2 , има прямо K общо уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

или еквив.

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

D-во

1) Това го видяхме в д-вото на 1) на т-ма 1.

2) π се задава от т. P_0 и векторите $v_1 = \vec{P_0 P_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$, $v_2 = \vec{P_0 P_2}(x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0)$. Прилагаме 1) и получаваме първото уравнение. Второто уравнение е еквив. на първото,

зачищото

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_0 & x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$\begin{matrix} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} \text{продв. по} \\ \text{4-та рсд} \end{matrix} \left| \begin{matrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{matrix} \right|$$

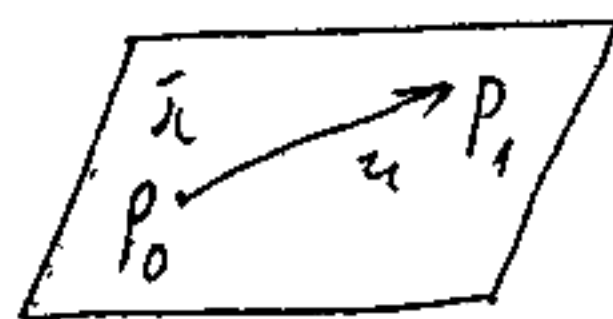
Т-ма 3 Нека равн. π има спрямо K общо уравнение

$Ax + By + Cz + D = 0$, а векторът n има спрямо K координати (a, b, c) . Тогава $n \perp \pi \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc = 0$. □

Д-во Нека $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Нека т. $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ~~е~~ $P_0P_1(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. От $\vec{P_0P_1} = n \Rightarrow x_1 - x_0 = a, y_1 - y_0 = b, z_1 - z_0 = c \Rightarrow x_1 = x_0 + a, y_1 = y_0 + b, z_1 = z_0 + c$

Той като $P_0 \in \pi \Rightarrow n \perp \pi \Leftrightarrow P_1 \in \pi$.

$$\Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$



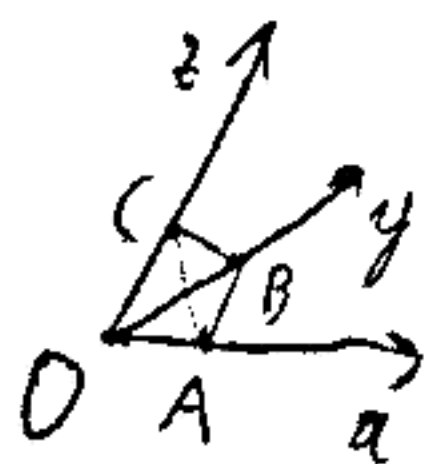
$$\begin{aligned} & A(x_0 + a) + B(y_0 + b) + C(z_0 + c) + D = 0 \\ & \underbrace{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}_{=0} + (Aa + Bb + Cc) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow Aa + Bb + Cc = 0.$$

□

2. Отрезково уравнение на равнината

Нека π е равнина, която не минава през началото O на K и не е успоредна на нито една от координатните ос.



$$\begin{aligned} \text{Озн. } A &= \pi \cap Ox \\ B &= \pi \cap Oy \\ C &= \pi \cap Oz. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} A(a, 0, 0) & \quad a \neq 0 \\ B(0, b, 0) & \quad \text{и} \quad b \neq 0, \text{ защото } \pi \text{ не е успоредна на } Ox \\ C(0, 0, c) & \quad c \neq 0 \end{aligned} \right\}$$

$A \neq 0, B \neq 0$ и $C \neq 0$, защото $O \notin \pi$.

Също A, B, C не са на една права, защото ако са, то това е AB в равн. $Oxy \Rightarrow C \in Oxy \Rightarrow C = 0$ - противоречие.
 $\Rightarrow A, B, C$ задават равнината π .

Тази равнина има общо уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$,
защото ~~точките~~ ^{Т. А, В, С} удовлетворяват това уравнение, т.е.

$$\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0, \text{ т.е. } \pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Уравнение от този вид се нарича отредово ~~и~~ уравнение на
 π спрямо К.

3. Декартово уравнение на равнина

Нека π е равнина, която не е успоредна на Oz . Нека
 $Ax + By + Cz + D = 0$ е общо уравнение на π . Тъгава $C \neq 0$, заш
то ако $C = 0$, то за $e_3(0,0,1)$ имаме $A \cdot 0 + B \cdot 0 + \underbrace{C}_{\neq 0} \cdot 1 = 0 \Rightarrow e_3 \parallel \pi$
 $\Rightarrow \pi \parallel Oz$ - противоречие. $\Rightarrow C \neq 0$.

$\Rightarrow$ уравнението е еквивалентно на $z = -\frac{A}{C} \cdot x - \frac{B}{C} \cdot y - \frac{D}{C}$. Озн.

$k = -\frac{A}{C}, l = -\frac{B}{C}, m = -\frac{D}{C} \Rightarrow \pi: z = kx + ly + m$. Уравнение от този
вид се нарича декартово уравнение на π спрямо К.

18. Взаимно положение на две равнини

Т-ма 1 $K = Oxyz$ - афинна координатна система. Нека равн.

π_1 и π_2 имат спрямо К общи уравнения $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
и $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Озн.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Тъгава:

1) $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow r(\tilde{A}) = 1$ ($\Leftrightarrow r(A) = 1$) $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1,$
(автоматично $\lambda \neq 0$) $D_2 = \lambda D_1$

2) $\pi_1 \parallel \pi_2$ и $\pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow r(A) = 1, r(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1,$
(автоматично $\lambda \neq 0$) $D_2 \neq \lambda D_1$

3) $\pi_1 \sim \pi_2$ са пресекателни $\Leftrightarrow r(A)=2$ ($u \Rightarrow r(\tilde{A})=2$) $\Leftrightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$$

Д-во A е подматрица на $\tilde{A} \Rightarrow \text{rank}(A) \leq \text{rank}(\tilde{A})$.

$r(A) \geq 1$, защото $(A_1, B_1, C_1) \neq \vec{0}$. (а и $r(\tilde{A}) \geq 1$ по същата причина).
 $\tilde{A} \in 2 \times 4 \Rightarrow r(\tilde{A}) \leq 2$.

$\Rightarrow 1 \leq r(A) \leq r(\tilde{A}) \leq 2 \Rightarrow$ имаме 3 възможности:

$$r(A)=1, r(\tilde{A})=1$$

$$r(A)=1, r(\tilde{A})=2$$

$$r(A)=2, r(\tilde{A})=2$$

и направим нещата в скобите:

$$r(\tilde{A})=1 \Rightarrow r(A)=1$$

$$r(A)=2 \Rightarrow r(\tilde{A})=2.$$

$\pi_1 \parallel \pi_2$ и $\pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 \sim \pi_2$ нямат общи точки

$\Leftrightarrow$ системата $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$ няма решение.

Отклонение по λA :

Т-ма (Рунге) Една линейна система има решение $\Leftrightarrow$ рангът на матрицата на системата е равен на рангът на разширената матрица на системата.

При нас матрицата на системата е A , а разширената матрица е $\tilde{A}$. $\Rightarrow$ системата няма решение $\Leftrightarrow r(A) \neq r(\tilde{A})$
 $\Leftrightarrow r(A)=1, r(\tilde{A})=2$. С това доказваме първата еквивалентност в 2). Ще докажем 1).

Нека $r(\tilde{A})=1$. Тъй като първият ред на $\tilde{A} \neq \vec{0}$, то $\exists \lambda \in \mathbb{R}$:
2-ри ред $= \lambda \cdot$ (първи ред), т.е. $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1, D_2 = \lambda D_1$,
при това $\lambda \neq 0$, защото и 2-ри ред $\neq 0 \Rightarrow$ ур. на π_2 става
 $\lambda(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) = 0$,

Като е еквивалентна на $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ - γρ. на π_1
 $\Rightarrow \pi_1 = \pi_2$.

Нека сѐка $\pi_1 = \pi_2 \Rightarrow \forall \pi$ с π_1 γρ. γρ. γρ. на π_2 . Услови-
 те $(A_1, B_1, C_1) \neq \vec{0}$. Нека кажем $A_1 \neq 0 \Rightarrow$ γρ. на π_1 е
 екв. на $x = -\frac{B_1}{A_1} y - \frac{C_1}{A_1} z - \frac{D_1}{A_1} \Rightarrow \forall y, z$ т. $P(-\frac{B_1}{A_1} y - \frac{C_1}{A_1} z - \frac{D_1}{A_1}, y, z) \in \pi_2$

$\Rightarrow$ когн. ѝ γρ. γρ. γρ. на π_2 .

$$\Rightarrow A_2 \left(-\frac{B_1}{A_1} y - \frac{C_1}{A_1} z - \frac{D_1}{A_1} \right) + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall y, z \left(B_2 - \frac{A_2 B_1}{A_1} \right) y + \left(C_2 - \frac{A_2 C_1}{A_1} \right) z + \left(D_2 - \frac{A_2 D_1}{A_1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \text{трет коеф. е } 0, \text{ т.е. } B_2 = \frac{A_2}{A_1} B_1, C_2 = \frac{A_2}{A_1} C_1, D_2 = \frac{A_2}{A_1} D_1.$$

Озн. $\lambda = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1, D_2 = \lambda D_1$. При тоа $\lambda \neq 0$,
 зато што инаку $A_2 = B_2 = C_2 = D_2 = 0$ - противоречие. $\Rightarrow$ редукте на $\tilde{A}$ са
 пропорционални $\Rightarrow r(\tilde{A}) \leq 1 \Rightarrow r(A) = 1$. (Тоа е доказано 1).

$\Rightarrow$ третата възможност за равнините е отбегнати иа тре-
 тата възможност за равнините, т.е. π_1 и π_2 са пресекателни,
 $\Leftrightarrow r(A) = 2 (= r(\tilde{A}))$. Отговарят вторите еквивалентности в 2) и 3).

$$r(A) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda: (2\text{-та ред}) = \lambda \cdot (1\text{-ва ред}) \text{ (като при } \tilde{A}).$$

$$\Leftrightarrow A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1 \text{ (и } \lambda \neq 0, \text{ защото вторият ред е } \neq \vec{0}).$$

Тогава $r(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow D_2 \neq \lambda D_1$ (защото инаку $r(\tilde{A}) = 1$). (Тоа е
 доказана втората екв. в 2).

От третата екв. $r(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$.
 (Тоа е доказана втората екв. в 3)

□

05.12.2018 1) На τ -ма 1 може да се запише като:

τ -ма 2 Нека прав. π има спрямо K общо уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогава всичките общи уравнения на π спрямо K са уравненията от вида

$$\lambda(Ax + By + Cz + D) = 0, \text{ където } \lambda \in \mathbb{R} \text{ и } \lambda \neq 0.$$

Д-во Ако $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, също е общо уравнение на π , то по $(\Rightarrow)$ в 1) на τ -ма 1 $\Rightarrow$ горното ще е от вида (1).
Обратно: $\forall$ ур. от вида (1) по $(\Leftarrow)$ в 1) на τ -ма 1 е уравнение на π . □

12. Задаване на права в пространството
чрез двойка уравнения

$K = Oxyz$ - афинна коорд. система

Опр. Ако правата ℓ се задава спрямо K със системата

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

То (1) се нарича двойка уравнения на ℓ спрямо K или общо уравнение на ℓ спрямо K .

Заб. Ако ℓ има двойка уравнения (1), то матрицата

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \text{ има } \text{ранг } 2, \text{ защото:}$$

$$A \text{ е } 2 \times 3 \Rightarrow \text{rank}(A) \leq 2.$$

Системата (1) има решение (коорд. на $\forall \tau$ от ℓ са решения) $\xrightarrow{\text{вече}} \text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A})$, където

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Ако $r(A)=0 \Rightarrow M(\tilde{A})=0 \Rightarrow \tilde{A}$ е нулева $\Rightarrow (1)$ е $\begin{vmatrix} 0=0 \\ 0=0 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow$ коорд на $\forall$ т. удовлетворяват (1) $\Rightarrow$ (1) е уравнение на цялото пространство, а не на правата ℓ - противоречие.

Ако $r(A)=1 \Rightarrow r(\tilde{A})=1$, $\Rightarrow$ някой от редовете на $\tilde{A}$ е ненулев, а също и на A , а другият е пропорционален на него.

Нека (1-ви ред на A) е $\neq \vec{0} \Rightarrow$ (1-ви ред на $\tilde{A}$) е $\neq \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (2-ри ред на $\tilde{A}$) = ~~λ (1-ви ред на $\tilde{A}$)~~ $\Rightarrow$

~~λ (1-ви ред на A)~~ (2-ро ур. в (1)) = λ (1-во ур. в (1)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2-рото уравнение в (1) следва от първото $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (1) е еквив. на $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$. Това е уравнение на равнина, защото $(A_1, B_1, C_1) \neq \vec{0}$, а не на права ℓ - противоречие. $\Rightarrow r(A)=2$ (а и $r(\tilde{A})=2$).

Т-ма 1

- 1) За всяка права ℓ същ. двойка уравнения спрямо K .
- 2) Ако системата (1) е такава, че матрицата $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ има ранг 2, **то** (1) е двойка уравнения на права спрямо K .

D-во

1) Нека $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ са пресекателни равнини и $\pi_1 \cap \pi_2 = \ell$.

$\Rightarrow$ спрямо K $\ell: \begin{vmatrix} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \ell$ има двойка уравнения спрямо K

2) A има ранг 2 $\Rightarrow$ двата реда на A са $\neq \vec{0} \Rightarrow$ двете ур. от системата са общи ур. на равнини π_1 и π_2 .

$r(A) = 2 \Rightarrow$ от T -мата за взаимното положение Π_1 и Π_2 са пресекателни. Нека $\ell = \Pi_1 \cap \Pi_2$ - пресекателната права.

$\Rightarrow \ell$ има ур. (1) спрямо K . $\Rightarrow$ (1) задава права □

~~В~~ В доказателството виждаме следното:

Т-ма 2 Правата ℓ има двойка уравнения (1) $\Leftrightarrow$ двете уравнения в (1) са уравнения на две пресекателни равнини, които се пресичат по ℓ .

Зад. Ако ℓ има спрямо K парам. уравнение

$$\ell: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R},$$

То (a, b, c) са коорд. на ненулев вектор $\parallel \ell \Rightarrow$ поне едно от a, b, c е $\neq 0$. $\Rightarrow$ от едно от уравненията можем да изразим λ ~~и~~ и като заместим в другите две получаваме двойка уравнения на ℓ .

Обратно: ако ℓ е зададена с двойка уравнения (1).

Тъй като $r(A) = 2$, две от неизвестните могат да се изразят чрез третото, напр. x и y чрез z .

$\Rightarrow$ получаваме $\begin{cases} x = x_0 + az \\ y = y_0 + bz \end{cases}$. Положим $z = \lambda$ и получаваме

параметрични уравнения на ℓ .

$$\ell: \begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Т-ма 3 Нека правата ℓ има спрямо K двойка уравнения (1). Тогава равн. Π съдържа $\ell \Leftrightarrow \Pi$ има спрямо K общо

уравнение

$$\pi: \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Автом. $(\lambda_1, \lambda_2) \neq \vec{0}$.

Д-во 1) ($\Rightarrow$) Нека π има спрямо K общо уравнение

$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$. Разг. системата:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

Тази система има решение, и то безбройно много. (коорд. на $\forall \pi$ от $\mathcal{E}$). По т-мата на Рунге $\Rightarrow$ матрицата на системата

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \text{ и разг. матрица } \tilde{A} = \left(A \mid \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{matrix} \right) \text{ имат}$$

едни и същ ранг.

Освен това $r(A) < 3$, защото ако $r(A) = 3 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ по ф-лите на Крамер системата има единствено решение - противоречие.

Тъй като рангът на матрицата от първите два реда на A е $\geq 2 \Rightarrow r(A) \geq 2 \Rightarrow r(A) = r(\tilde{A}) = 2$

$\Rightarrow$ трите реда на $\tilde{A}$ са лн. зависими, т.е. единият от тях е лн. комбинация на другите два.

По матр. от първите два реда на A , а $\Rightarrow$ и на $\tilde{A}$, има ранг 2.

$\Rightarrow$ първите два реда на $\tilde{A}$ са лн. независими $\Rightarrow$ трети ред на $\tilde{A}$ е лн. комб. на първите два, т.е. $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$(3\text{-ти ред на } \tilde{A}) = \lambda_1(1\text{-ви ред}) + \lambda_2(2\text{-ри ред}) \Rightarrow A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \\ B_3 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2, C_3 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \text{ и } D_3 = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$$

$\Rightarrow$ ур. на π е точно от искания вид.

Търсим това $(\lambda_1, \lambda_2) \neq \vec{0}$, защото ако $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow A_3 = B_3 + C_3 + D_3 = 0$ - противоречие, защото те са коэф. в уравнението на $\pi \Rightarrow (A_3, B_3, C_3) \neq 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \neq \vec{0}$.

2) ($\Leftarrow$) Нека $\pi: \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$
 $\Rightarrow$ коорд. на $\forall$ т. от ℓ удовл. уравнението на $\pi \Rightarrow \forall$ т. от ℓ е върху $\pi \Rightarrow \ell \subseteq \pi$. $\square$

Т-ма 4 (Взаимно положение на права и равнина)

Нека спрямо ℓ правата ℓ се задава с двойката ур. (1), а равн. π се задава с общо уравнение

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \left(A \mid \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{matrix} \right)$$

Тогава:

$$1) \ell \subseteq \pi \Leftrightarrow r(\tilde{A}) = 2 \quad (\Leftrightarrow \text{и } r(A) = 2)$$

$$2) \ell \parallel \pi \text{ и } \ell \text{ не се съдържа в } \pi \Leftrightarrow r(A) = 2, r(\tilde{A}) = 3$$

$$3) \ell \text{ и } \pi \text{ са пресекателни} \Leftrightarrow r(A) = 3 \quad (\Leftrightarrow \text{и } r(\tilde{A}) = 3) \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Д-во В д-вото на предната т-ма видяхме, че $r(A) \geq 2$.

Също A е подматрица на $\tilde{A} \Rightarrow r(A) \leq r(\tilde{A})$. Също $\tilde{A}$ е 3×4
 $\Rightarrow r(\tilde{A}) \leq 3$.

$$\Rightarrow 2 \leq r(A) \leq r(\tilde{A}) \leq 3.$$

$\Rightarrow$ имаме следните три възможности:

$$\bullet r(A) = 2, r(\tilde{A}) = 2$$

$$\bullet r(A) = 2, r(\tilde{A}) = 3$$

$$r(A)=3, r(\tilde{A})=3$$

Т-ма 1 и ~~втората~~ доказателството ѝ показват, че първата възможност съответства на $\ell \subseteq \pi$.

Втората възможност е единствената, при която $r(A) \neq r(\tilde{A})$, т.е. (по Вуне) това е случаят, когато системата от трите уравнения няма решение.

$\Rightarrow$ втората възможност съответства на $\ell \parallel \pi$ и ℓ не се съдържа в π .

$\Rightarrow$ третата възможност за равнините съответства на третата възможност за позицията на ℓ и π , а именно ℓ и π са пресекателни

Т-ма 5 Нека правите ℓ_1 и ℓ_2 имат спрямо K двойки уравнения

$$\ell_1: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \text{ и } \ell_2: \begin{cases} A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 \\ A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \left(A \mid \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{matrix} \right)$$

Тогава

$$1) \ell_1 = \ell_2 \Leftrightarrow r(\tilde{A}) = 2 \text{ (и } \Rightarrow \text{ и } r(A) = 2)$$

$$2) \ell_1 \parallel \ell_2 \text{ и } \ell_1 \neq \ell_2 \Leftrightarrow r(A) = 2, r(\tilde{A}) = 3$$

$$3) \ell_1 \text{ и } \ell_2 \text{ са пресекателни} \Leftrightarrow r(A) = 3, r(\tilde{A}) = 3$$

$$4) \ell_1 \text{ и } \ell_2 \text{ са кривосложни} \Leftrightarrow r(A) = 3, r(\tilde{A}) = 4 \Leftrightarrow r(\tilde{A}) = 4, \text{ т.е. } \det(\tilde{A}) \neq 0$$

D-60

Рангът на подматрицата на A , състояща се от първите два реда, е 2 $\Rightarrow r(A) \geq 2$.

A е подматрица на $\tilde{A} \Rightarrow r(A) \leq r(\tilde{A})$.

$\tilde{A}$ има само един стълб повече от $A \Rightarrow r(\tilde{A}) \leq r(A) + 1$

$\tilde{A}$ е $4 \times 4 \Rightarrow r(\tilde{A}) \leq 4$.

$\Rightarrow 2 \leq r(A) \leq r(\tilde{A}) \leq 4$ и $r(\tilde{A}) \leq r(A) + 1$.

$\Rightarrow$ имаме следните четири възможности:

* $r(A) = 2$ и $r(\tilde{A}) = 2$

* $r(A) = 2$ и $r(\tilde{A}) = 3$

* $r(A) = 3$ и $r(\tilde{A}) = 3$

* $r(A) = 3$ и $r(\tilde{A}) = 4$

Системата от четирите уравнения дава множеството от общите точки на ℓ_1 и ℓ_2 и тя има решение $\Leftrightarrow$

$r(A) = r(\tilde{A})$, т.е. само в първи и трети случаи.

$r(A) = 3 = r(\tilde{A})$ означава, че системата има единственото решение, т.е. това ~~уравнение~~ съответства на случая, че ℓ_1 и ℓ_2 са пресекателни. $\Rightarrow r(A) > r(\tilde{A}) = 2$ съответства на случая, когато системата има безброй решения, т.е. правите съвпадат.

$r(A) = 2$ означава, че 3-ти и 4-ти ред на A са лин. комбинации на 1-ви и 2-ри ред $\Rightarrow$ по т-ма 4 уравненията $\pi_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ и $\pi_4: A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0$ са $\parallel$ на ℓ_1 .

$\Rightarrow \ell_2 = \pi_3 \cap \pi_4$ е успоредна на ℓ_1

$\Rightarrow$ ~~никога~~ ^{$r(A)=2$} означава $\ell_1 \parallel \ell_2$.

2.1. Нормално уравнение на равнината

Опр. Вектор, който е $\perp$ на равн. π , т.е. е $\perp$ на векторите, които са коллинеарни с π , се нарича нормален вектор за π .

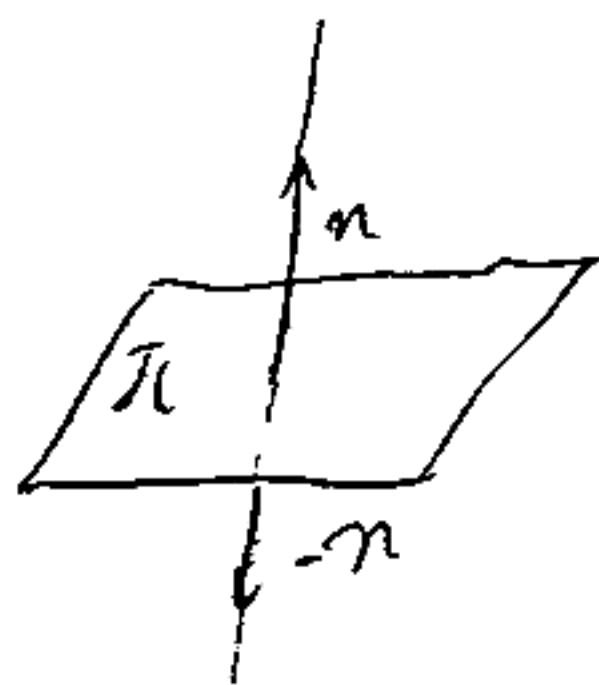
Отгук изтатък $K:Oxyz$ е ортонорм. коорд. система

Т-ма 1 Нека равн. π има спрямо K общо уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогава векторът N , чийто коорд. относно K са (A, B, C) , е ненулев нормален вектор за π .

Д-во Нека $(A, B, C) \neq \vec{0} \Rightarrow N \neq \vec{0}$. Нека $\vec{v}$ -ят $u(a, b, c)$ ~~е даден~~
 $\Rightarrow u \parallel \pi \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc = 0 \Leftrightarrow \langle N, u \rangle = 0 \Leftrightarrow N \perp u \Rightarrow N \perp u$ за всеки $\vec{v}$ -р $u \parallel \pi \Rightarrow N$ е нормален вектор за π . $\square$

Т-ма 2 Нека $T. P_0$ и ненулевият вектор N имат спрямо K коорд. $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $N(A, B, C)$. Тогава равнината през P_0 , която е $\perp N$, има спрямо K общо уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Д-во Като за съотв. тв. за права в равнината $\square$



π -равн. $\Rightarrow \forall$ норм. вектори за π са коллинеарни.

$\Rightarrow$ има точно два единични нормални вектори: n и $-n$.

Ако $N(A, B, C)$ е нормален за π и $N \neq \vec{0}$, то един. норм. $\vec{v}$ -ри са:

$$n = \frac{N}{|N|} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right) \text{ и } -n.$$

Опр. Общо уравнение, спрямо K на равн. π , в което векторът α коорд. коеф. пред x, y и z е единичен, се

написа нормално уравнение на π спрямо K , т.е.

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \text{ е норм. ур. } \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Т-ма 3 Всяка равн. π има спрямо K точно два нормални уравнения. Ако π има спрямо K общо уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, то двете норм. ур. са:

$$\pm \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Д-во: Аналогично на права в равнина

Приложения на норм. уравнение

~~1)~~ 1) Нека равн. π има спрямо K ~~общо~~ уравнение $\pi: \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. и $\pi.P_0$ има спрямо K коорд. $P_0(x_0, y_0, z_0)$
Озн. $F(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$.

Това е разстоянието от P_0 до π е

$$d(P_0, \pi) = |F(x_0, y_0, z_0)|.$$

Д-во: Аналогично на права в равнина

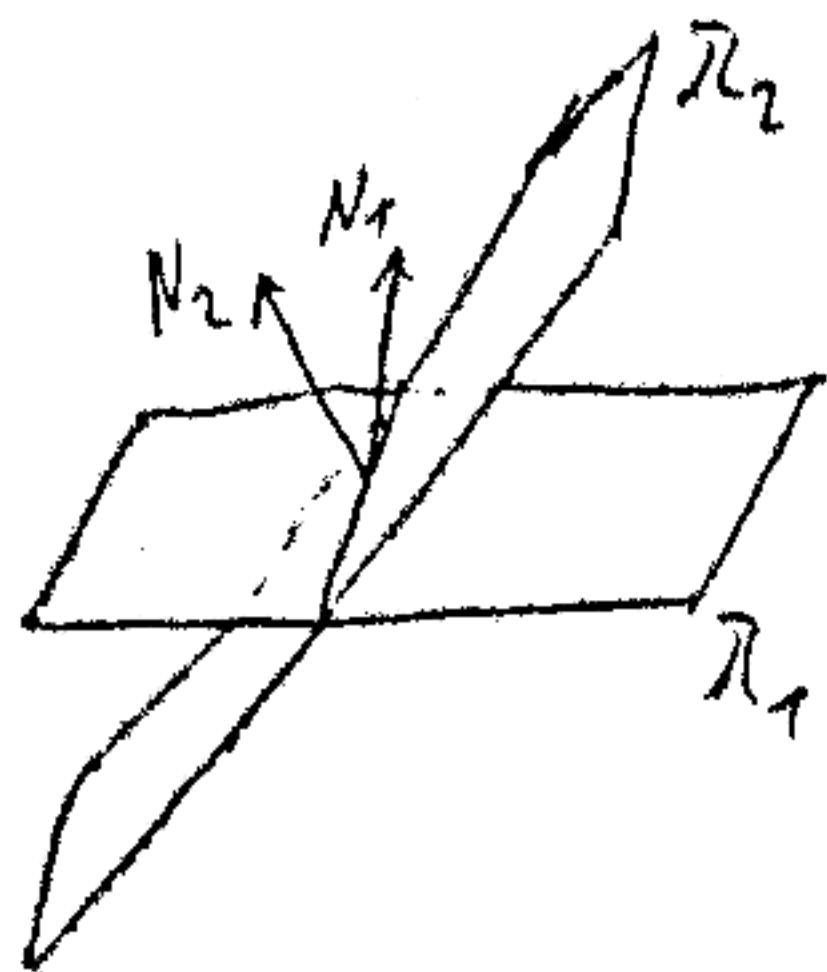
Заб. Числото $\delta(P_0, \pi) = F(x_0, y_0, z_0)$ се нарича ориентирано разстояние от P_0 до π по отн. на норм. ~~уравнение~~ вектор $n(\alpha, \beta, \gamma)$. Имаме:

$\delta(P_0, \pi) > 0 \Leftrightarrow P_0$ е в отв. полупр., в която съм n

$\delta(P_0, \pi) < 0 \Leftrightarrow P_0$ е в отв. полупр., в която съм $-n$.

2) Вън метрику равнини

Под вън ~~ме~~ метрику две равнини π_1 и π_2 се разбира по-малкият от ъгъла, който сключват



Нека N_1 и N_2 са ненулеви норм. вектори за π_1 и π_2 .

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \begin{cases} \angle(N_1, N_2), & \text{ако } \angle(N_1, N_2) \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \angle(N_1, N_2), & \text{ако } \angle(N_1, N_2) > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \angle(\pi_1, \pi_2) = |\cos \angle(N_1, N_2)|$$

Нека π_1 и π_2 имат нормални уравнения

$\pi_i: d_i x + \beta_i y + \gamma_i z + \delta_i \Rightarrow n_1(d_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $n_2(d_2, \beta_2, \gamma_2)$ са едн. норм. вектори за π_1 и π_2

$$\Rightarrow \cos \angle(\pi_1, \pi_2) = |\cos \angle(N_1, N_2)| = \left| \frac{\langle N_1, N_2 \rangle}{|N_1| |N_2|} \right| = |\langle N_1, N_2 \rangle|$$

$$= |d_1 d_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2| \Rightarrow \angle(\pi_1, \pi_2) = \arccos |d_1 d_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2|$$

12.12.2018 22. Окръжност, елипс, хипербола, парабола

Работим в равнината

1. Окръжност

Опр. Окръжност с център $T.C$ и радиус $R > 0$ е множеството K от точките, които са на разстояние R от C , т.е.

мамо K

$$K = \{P: |CP| = R\}$$

мамо K

Нека $K = Oxy$ е ортогонализирана координатна система.

: Нека $C(d, \beta)$. Ако $P(x, y)$, то $|CP| = \sqrt{(x-d)^2 + (y-\beta)^2}$

$$\Rightarrow P(x, y) \in K \Leftrightarrow |CP| = R \Leftrightarrow \sqrt{(x-d)^2 + (y-\beta)^2} = R \Leftrightarrow (x-d)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow K: (x-d)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \text{ спрямо } K.$$

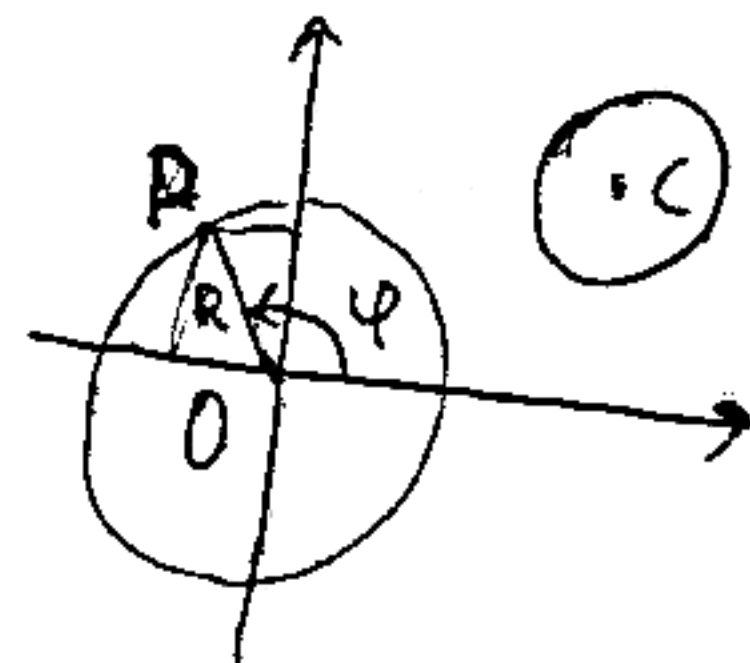
$\Rightarrow$ окръжностите са алгебрични криви от 2-ра степен.

Ако $C = O$, то $d = 0, \beta = 0$ и $K: x^2 + y^2 = R^2$. Това се нарича канонично (или центрирано) уравнение на окръжността.

Параметрични уравнения:

За $P(x, y) \in K$ озм. $\varphi = \angle(Ox, \vec{OP})$

ориентиран ъгъл



$$\Rightarrow \varphi \in [0, 2\pi).$$

$$\Rightarrow x = R \cos \varphi,$$

$$y = R \sin \varphi$$

Обратно, ако P има координати (x, y) , които се получават по горните формули за някое φ .

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow P \in K.$$

$$\Rightarrow K: \begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

Ако $C(d, \beta) \neq O$, то аналогично се получава $K: \begin{cases} x = d + R \cos \varphi \\ y = \beta + R \sin \varphi \end{cases}$

2. „Алгебрична“ дефиниция на елипса, хипербола и парабола
Елипса:

Опр. Елипса е множество K , което спрямо някаква ортogonalна коорд. система $K=Oxy$ има уравнение от вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, където $a > b > 0$. Това уравнение се нарича канонично уравнение на елипса.

$\Rightarrow$ елипсите са алгебрични криви от втора степен.

Заб. Ако $a = b$, то очевидно получаваме окръжност с център O и радиус $R = a = b$. Затова понякога окръжностите се разгл. като частен случай на елипса.

O се нарича център на K .

$A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$ и $B_2(0, -b)$ се наричат верхове на K .

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ се нарича линейн ексцентриситет на K

$e = \frac{c}{a}$ се нарича (линейн) ексцентриситет на K .

$a > b > 0 \Rightarrow a > c > 0 \Rightarrow 0 < e < 1$.

a и b се наричат полуоси на K .

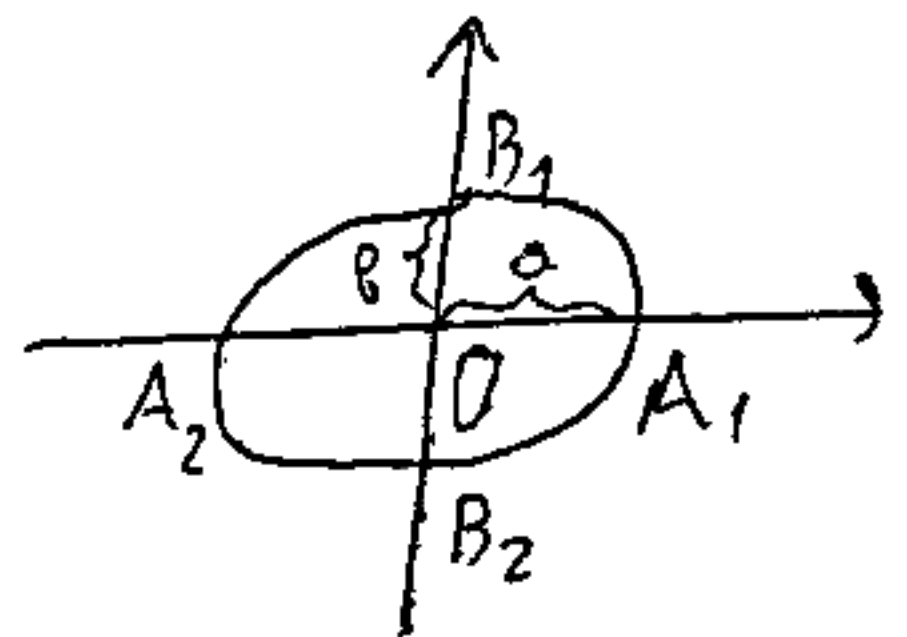
Точките $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ се наричат фокуси на K .

Правите $d_1: x = \frac{a^2}{c}$ ($= \frac{a}{e} = \frac{c}{e^2}$) и $d_2: x = -\frac{a^2}{c}$ ($= -\frac{a}{e} = -\frac{c}{e^2}$) се наричат директриси, съответни на фокусите F_1 и F_2 .

Заб. При окръжност ($a = b$) $\Rightarrow c = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = e = 0$. Затова по деф. на окръжност ексцентриситетът е $e = 0$.

Параметрични уравнения:

Ако $P(x, y) \in K \Rightarrow (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1 \Rightarrow Q(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) \in$ един. окръжност
 $\Rightarrow \exists! \varphi \in [0, 2\pi[: \frac{x}{a} = \cos \varphi, \frac{y}{b} = \sin \varphi \Rightarrow x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$.



Обратно, ако за P координатите x и y се задават по горните формули за някое φ , то очевидно $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, т.е. $P \in K$

$$\Rightarrow K: \begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

Хипербола:

Опр. Хипербола е множество K , което спрямо някаква ортонорм. координатна система $K = Oxy$ има уравнение от вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, където $a > 0, b > 0 \Rightarrow$ хиперболите са алгебрични криви от втора степен.

Горното уравнение се нарича канонично уравнение на хипербола.

O се нарича център на K .

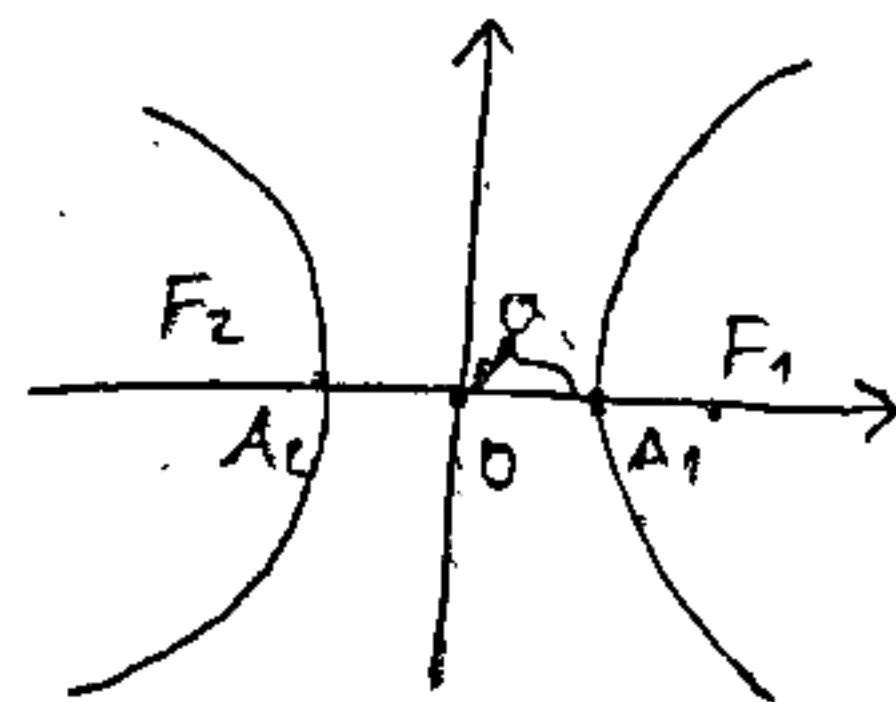
$A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$ се наричат верхове на K .

a - реална полуос (реални)

b - имагинерна полуос

(ако формално допуснем комплексни координати, то прес. т. на K с Oy са $B_1(0, ib)$ и $B_2(0, -ib)$).

имагинерни верхове,



$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - линеен ексцентриситет на K

$e = \frac{c}{a}$ - (линеен) ексцентриситет

$$c > a \Rightarrow e > 1$$

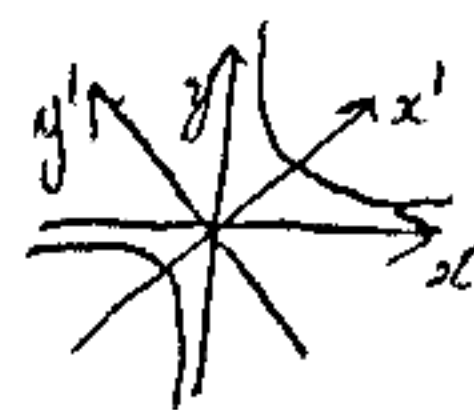
$F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ се наричат фокуси на K

Правите $d_1: x = \frac{a^2}{c} (= \frac{a}{e} = \frac{c}{e^2})$ и $d_2: x = -\frac{a^2}{c} (= -\frac{a}{e} = -\frac{c}{e^2})$ се наричат директриси, съответни на фокусите F_1 и F_2

Заб. Графиката на $y = \frac{1}{x}$ е хипербола

$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$ Това уравнението $xy = 1$ става

$$y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \quad \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1, \text{ т.е. хипербола с } a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}.$$



Параметрични уравнения:

За хиперболическите функции

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

Вали аналог на т-мата Та Питогор:

$$\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1.$$

Също, те са непрекъснати, $\operatorname{ch} \varphi > 0$ (дори при $\varphi > 1$),

$\operatorname{sh} \varphi$ е монотонно растяща и $\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} \varphi = -\infty$, $\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} \varphi = +\infty$.

Нека $P(x, y) \in$ десния клон на k (т.е. $x > 0$). Това $\exists! \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\frac{y}{b} = \operatorname{sh} \varphi \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 \varphi = \operatorname{ch}^2 \varphi.$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \operatorname{ch} \varphi.$$

$$\text{Значи } \begin{cases} x = a \operatorname{ch} \varphi \\ y = b \operatorname{sh} \varphi \end{cases}$$

Обратно, ако P има коорд (x, y) , които се намират по тези формули за някое φ , то

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1 \Rightarrow P \in k, \text{ и то на десния клон,}$$

защото $x = a \operatorname{ch} \varphi > 0$

$$\Rightarrow \text{десният клон на } k: \begin{cases} x = a \operatorname{ch} \varphi \\ y = b \operatorname{sh} \varphi \end{cases}, \varphi \in \mathbb{R}$$

Аналитично:

$$\text{левият клон на } K: \begin{cases} x = -a \cosh \varphi \\ y = b \sinh \varphi \end{cases}, \varphi \in \mathbb{R}$$

~~Парабола~~: Парабола:

Опр. Парабола е лн. K , която спрямо някаква ортогонална к.с. $K=Oxy$ има уравнение от вида $y^2=2px$, където $p>0$. Това уравнение се нарича канонично уравнение на парабол.

$\Rightarrow$ параболите са алгебрични криви от втора степен.

т.О се нарича верх на K

p се нарича параметър на K

$F(\frac{p}{2}, 0)$ се нарича фокус на K

Правата $d: x = -\frac{p}{2}$ се нарича директриса на K

За парабол по деф. ексцентриситетът е $e=1$.

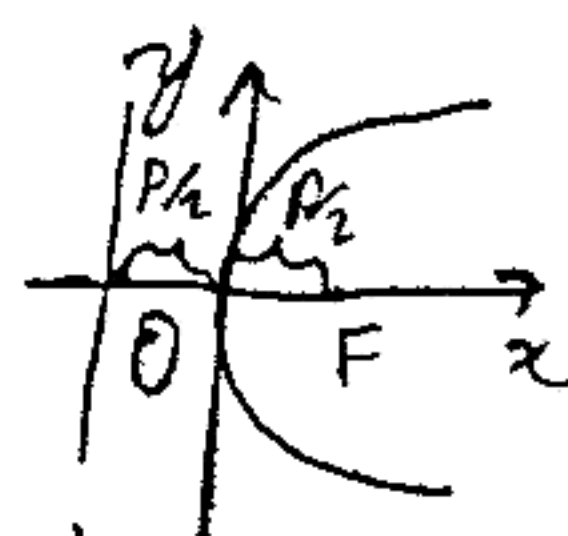
Заб. $y=x^2$ или $y=ax^2$ са парабол

Параметрични уравнения:

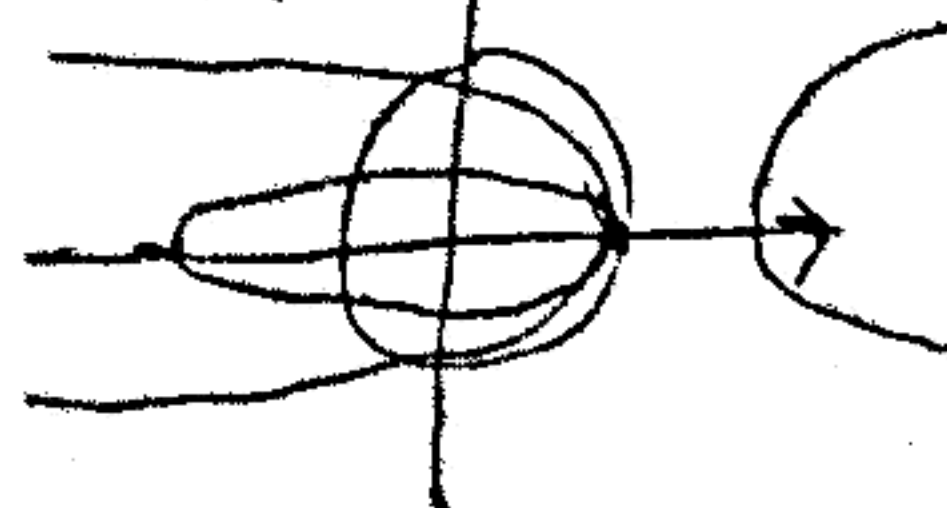
$$y^2=2px \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2p}$$

$\Rightarrow$ може за параметър да вземем y .

$$\Rightarrow K: \begin{cases} x = \frac{y^2}{2p} \\ y = y \end{cases}, y \in \mathbb{R}$$



и илюстрация на това как е определена типът на кривата



3. Елипка и хипербола чрез разстояние до фокусите
Т-ма 1 Нека F_1 и F_2 са две различни точки и $|F_1 F_2| = 2c$.
 Тогава:

1) Множеството K от точките, за които сумата на разстоянията до F_1 и F_2 е дадена константа $2a$, където $a > c$, т.е. $K = \{P: |F_1 P| + |F_2 P| = 2a\}$, е елипка с фокуси F_1 и F_2 (и полуоси a и $b = \sqrt{a^2 - c^2}$).

Обратно: за $\forall$ елипка K сумата ~~до~~ от разстоянията на точките от K до фокусите е константа

2) Множеството K от точките, за които абсолютната стойност на разликата ~~до~~ от разстоянията до F_1 и F_2 е дадена константа $2a$, където $a < c$, т.е. $K = \{P: ||F_1 P| - |F_2 P|| = 2a\}$, е хипербола с фокуси F_1 и F_2 (и полуоси a и $b = \sqrt{c^2 - a^2}$).

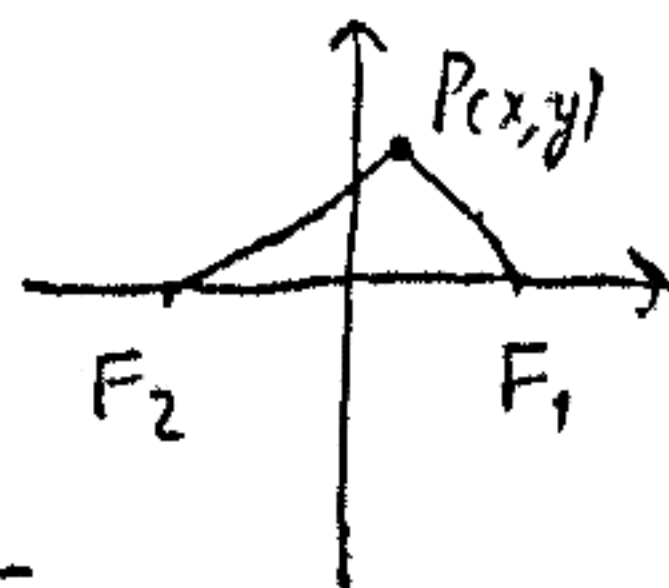
Обратно: за $\forall$ хипербола K абсолютната стойност на разликата от разстоянията от точките на K до фокусите е константа.

Д-во Избираме ортонорм. коорд. система $K = Oxy: F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$

$Ox = F_1 F_2$

Oy - симетрала на $F_1 F_2$

Посока на Ox : F_1 да е върху положителната полуос.



Ако $P(x, y)$, то $|F_1 P| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $|F_2 P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$.

Нека $P(x, y) \in K \Rightarrow$ в 1) $|F_1 P| + |F_2 P| = 2a \Rightarrow |F_2 P| = 2a - |F_1 P|$

в 2) $||F_1 P| - |F_2 P|| = 2a \Rightarrow |F_1 P| - |F_2 P| = \pm 2a$

$\Rightarrow -|F_2 P| = \pm 2a - |F_1 P|$

$\Rightarrow$ двете могат да се запишат заедно по следния начин:

$$\pm |F_2 P| = \pm 2a - |F_1 P| \quad (\pm \text{ отъкло и отдалено са координатите})$$

$$\Rightarrow \pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 \mp 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 \mp 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \pm 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\Rightarrow a^2 \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = (a^2 - cx)^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow a^2 x^2 - 2a^2 cx + a^2 c^2 + a^2 y^2 = a^4 - 2a^2 cx - c^2 x^2$$

$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = \underbrace{a^4 - a^2 c^2}_{=a^2(a^2 - c^2)} \quad / \quad a^2(a^2 - c^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

В 1) $a > c$, дефиниция $b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0$ и $\Rightarrow P$ удовлетворява $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

уравнение на елипс

2) $a < c$, дефиниция $b = \sqrt{c^2 - a^2} > 0$ и $\Rightarrow P$ удовлетворява $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

уравнение на хипербола

$\Rightarrow$ поради избора на b фокусите и в двата случая са F_1 и F_2 .

По този начин, за всяко $P \in K$, координатите му удовлетворяват уравнението на елипса или хиперболата.

Обратно, нека $P(x, y)$ удовлетворява уравнението.

$\Rightarrow$ като се вземе предвид неомоното за $b \Rightarrow P$ удовлетворява (1).

$$\Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow |F_1 P| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |a - \frac{c}{a}x|$$

Тогда $|F_2 P| = |a + \frac{c}{a}x|$, поэтому $|F_2 P|^2 = (x+c)^2 + y^2 =$

$$= x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + 4cx = (x-c)^2 + y^2 + 4cx \quad (2)$$

$$= (a - \frac{c}{a}x)^2 + 4cx = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 + 4cx = (a + \frac{c}{a}x)^2$$

В 1) (эллипс)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \leq 1 \Rightarrow -a \leq x \leq a \Rightarrow -c \leq \frac{c}{a}x \leq c$$

Но $c < a \Rightarrow -a < -c \leq \frac{c}{a}x \leq c < a \Rightarrow a - \frac{c}{a}x > 0 \Rightarrow |F_1 P| = |a - \frac{c}{a}x| =$

$$= a - \frac{c}{a}x > 0 \Rightarrow |F_2 P| = |a + \frac{c}{a}x| = a + \frac{c}{a}x$$

$$\Rightarrow |F_1 P| + |F_2 P| = (a - \frac{c}{a}x) + (a + \frac{c}{a}x) = 2a \Rightarrow P \in K.$$

$\Rightarrow K$ — линия уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow K$ — эллипс

В 2) (гипербола):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow x \geq a \text{ или } x \leq -a \Rightarrow \frac{c}{a}x \geq c \text{ или } \frac{c}{a}x \leq -c$$

$$a < c \Rightarrow \frac{c}{a}x \geq c > a \text{ или } \frac{c}{a}x \leq -c < -a.$$

Если $\frac{c}{a}x > a$, тогда $a - \frac{c}{a}x < 0 \Rightarrow |F_1 P| = |a - \frac{c}{a}x| = -(a - \frac{c}{a}x)$

$$a + \frac{c}{a}x > 2a > 0 \Rightarrow |F_2 P| = |a + \frac{c}{a}x| = a + \frac{c}{a}x$$

$$\Rightarrow ||F_1 P| - |F_2 P|| = |\frac{c}{a}x - a - a - \frac{c}{a}x| = 2a \Rightarrow P \in K.$$

Если $\frac{c}{a}x < -a$, тогда $a + \frac{c}{a}x < 0 \Rightarrow |F_2 P| = |a + \frac{c}{a}x| = -(a + \frac{c}{a}x)$

$$a - \frac{c}{a}x > 2a > 0 \Rightarrow |F_1 P| = |a - \frac{c}{a}x| = a - \frac{c}{a}x$$

$$\Rightarrow ||F_1 P| - |F_2 P|| = |a - \frac{c}{a}x + a + \frac{c}{a}x| = 2a \Rightarrow P \in K.$$

$\Rightarrow K$ има уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow K$ е хипербола.
Запитите с "обратно..." следват от горната обратна посока.

Заб. 1) на горната теорема върви и когато $F_1 = F_2$. Тогава $c=0 \Rightarrow$ падава се окръжност.

2) Горната теорема дава следната симетрична деф. на елипса и хипербола, която е еквивалентна на алгебричната:

Опр. 1) Елипса е множеството от точки, за които сумата от разстоянията до две дадени точки е константа.

2) Хиперболата е множеството от точки, за които абсолютната стойност на разликата от разстоянията до две дадени точки е константа.

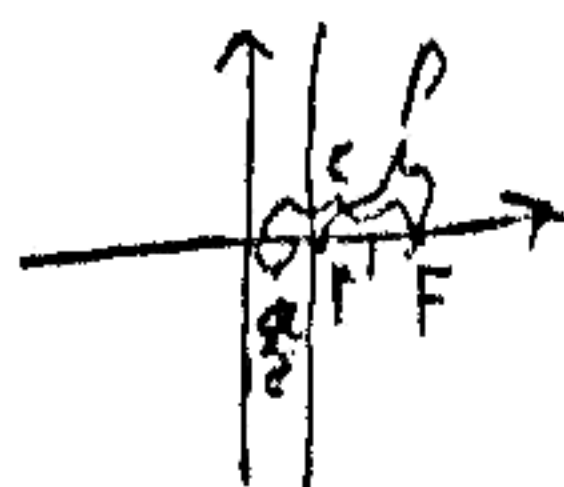
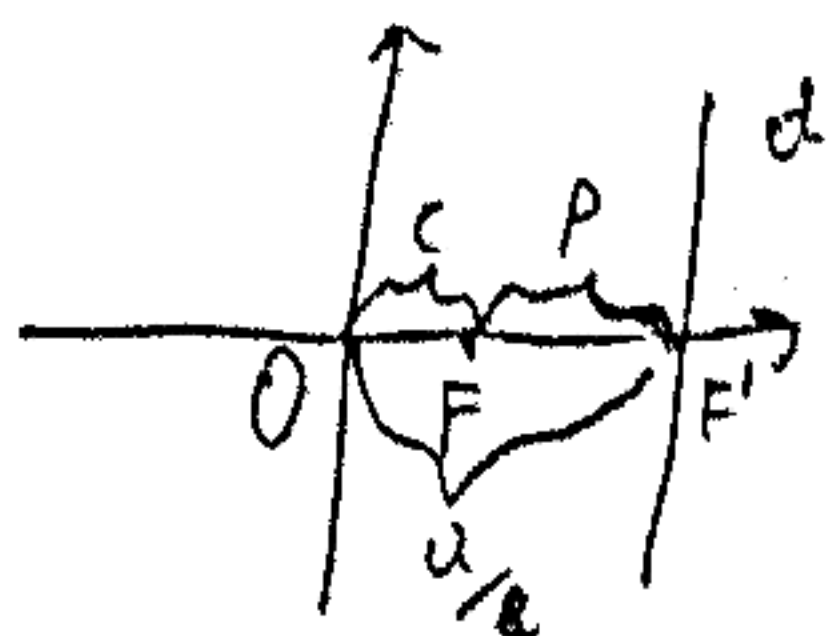
4. Елипса, хипербола и парабола чрез разстоянията до фокус и директриса

Т-ма 2 Нека F и d са дадени точка и права, като $F \notin d$ и $e > 0$ е дадено число. Тогава множеството K от точките, за които отношението на разстоянията до F и d е константата e , т.е. $K = \{P: \frac{|FP|}{d(P,d)} = e\}$, е елипса при $e < 1$, хипербола при $e > 1$ и парабола при $e = 1$, за която F е фокус, d е съответната му директриса, а e е ексцентриситетът.

Обратно: за всяка елипса или хипербола или парабола K отн. между разстоянията от точките от K до фокус и съотв. му директриса е константата e (ексцентриситетът на K).

Заб. 1) За елипса и хипербола, т.е. $e \neq 1$, искаме да изберем коорд. система K : $F(c, 0), d: x = \frac{c}{e^2}$
ортогонална

F и d са гъдени $\Rightarrow$ гъдено е разст. $p = d(F, d)$ (p се нарича параметър на елипсата или трансформацията)



$\Rightarrow$ искаме $p = \left| c - \frac{c}{e^2} \right| = \frac{c|e^2 - 1|}{e^2} \Rightarrow c = p \cdot \frac{e^2}{|e^2 - 1|}$

19.12.2018 F' -ортот. проекция на F в-ху d .

Взимаме още Ox да е правата FF'

O да е на разстояние c от F върху тази права, като
при $e < 1$ е върху провекторния лъч на FF' , а
при $e > 1$ е върху лъча FF' .

Лоската на Ox е на лъча OF ; $Oy \parallel d$.

$$\text{Озн. } a = \frac{c}{e}$$

$$\Rightarrow d: x - \frac{a^2}{c} = 0$$

Ако P има коорд (x, y) спрямо K , то

$$|FP| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$d(P, d) = |x - \frac{c}{e^2}| = |x - \frac{a^2}{c}|$, защото $x - \frac{c}{e^2} = 0$ е норм. уравнение на d .

$$P \in K \Leftrightarrow \frac{|FP|}{d(P, d)} = e = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \underbrace{\frac{c}{a} |x - \frac{a^2}{c}|}_{= |\frac{c}{a}x - a|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = (\frac{c}{a}x - a)^2.$$

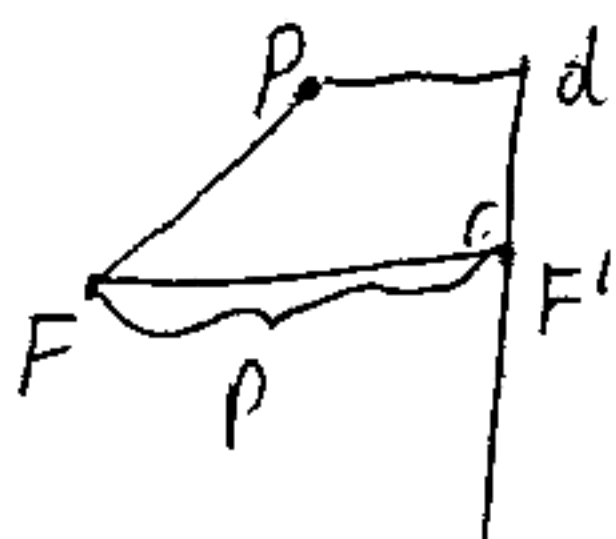
Това уравнение го имаме в д-вото на т-ма 1 и там
видяхме, че то е еквивалентно на $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $c < a$,
т.е. при $e < 1$, където $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, елима с фокус F (защото
 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$) и директриса d (заради уравнението) ~~и~~ и
ексцентриситет $e = \frac{c}{a}$ или $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $c > a$, т.е. при $e > 1$,
където $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ - хипербола с фокус F (защ. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$) и
директриса d (заради ур.) и эксц. $e = \frac{c}{a}$.

Частта с "Обратно" следва като тръгнем от канон. уравнения и прочетем горните еквивалентности отзад напред.

2) $e=1$

Имаме ортогони. коорд. система:

$F(\frac{p}{2}, 0)$, $d: x + \frac{p}{2} = 0$



F' - орт. проекция на F в-къ d .

Знаем $p = d(F, d) = |FF'|$.

Взимаме O да е средата на FF' , оста

Ox да е правата FF' , като полож. посока се определя от $OP \rightarrow$, $Oy \parallel d \Rightarrow F(\frac{p}{2}, 0)$; $d: x = -\frac{p}{2}$.

$P(x, y) \Rightarrow |FP| = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$

$|d(P, d)| = |x + \frac{p}{2}|$

(зау. $x + \frac{p}{2} = 0$ е нормално уравнение на d).

$\Rightarrow P \in K \Leftrightarrow \frac{|FP|}{d(P, d)} = e = 1 \Rightarrow \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}| \Leftrightarrow (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2$

$\Leftrightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow y = 2px \Rightarrow K: y = 2px \Rightarrow$

$\Rightarrow K$ е парабола с фокус F (заради коорд.) и директриса d (заради уравн.) и ексцентриситет $e=1$.

Частта с "Обратно ..." се написва като се тръгне от уравн. и се прочетат еквив. в обратна посока

От т-ма 2 научаване следната геом. деф, еквив. на сферичността:

Опр. Множеството от точки, за които отношението на разстоянието до дадена точка и дадена нелинейна функция през точката е постоянно, равно на e , се нарича елипсоид при $e < 1$, хипербола при $e > 1$ и параболоид при $e = 1$.

23. Сфера, цилиндър, конус. Конични сечения.

Работим в пространството

1. Сфера

Опр. Сфера с център C и радиус $R > 0$ е множеството S от всички точки, които се намират на разстояние R от т. C , т.е. $S = \{P : |CP| = R\}$.

$K = Oxyz$ - ортонорм. коорд. система.

Спрямо K $C(d, \beta, \gamma)$ и $P(x, y, z)$

$$\Rightarrow |CP| = \sqrt{(x-d)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} \Rightarrow P \in S \Leftrightarrow |CP| = R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-d)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} = R \Leftrightarrow (x-d)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow S: (x-d)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2 \text{ спрямо } K.$$

$\Rightarrow$ сферите са алгебрични ~~поверхности~~ поверхности от втора степен. Ако $C = \mathbf{0} \Rightarrow d = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

канонично (центрично)
уравнение на сфера

Параметрични уравнения
Нека $C = \mathbf{0}$

Озм. $\theta = \angle(\vec{OP}, \vec{Oz}) \Rightarrow \theta \in [0, \pi]$

P' - орт. проекция на P в равн. Oxy .

Озм. $\varphi = \angle(Ox, \vec{OP'})$ - ориент. угол, $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow z = R \cos \theta$$

$$|OP'| = R \sin \theta$$

Узнаем $P'(x, y, 0)$. Както при сферичността $x = |OP'| \cos \varphi$

$$y = |OP'| \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases} \quad (1)$$

Обратно: ако $P(x, y, z)$ е такава, че е изпълнена системата (1) за някои $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\theta \in [0, \pi]$, то очевидно $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow P \in S$.

$\Rightarrow S$ има спрямо K параметрични уравнения (1). за $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$.

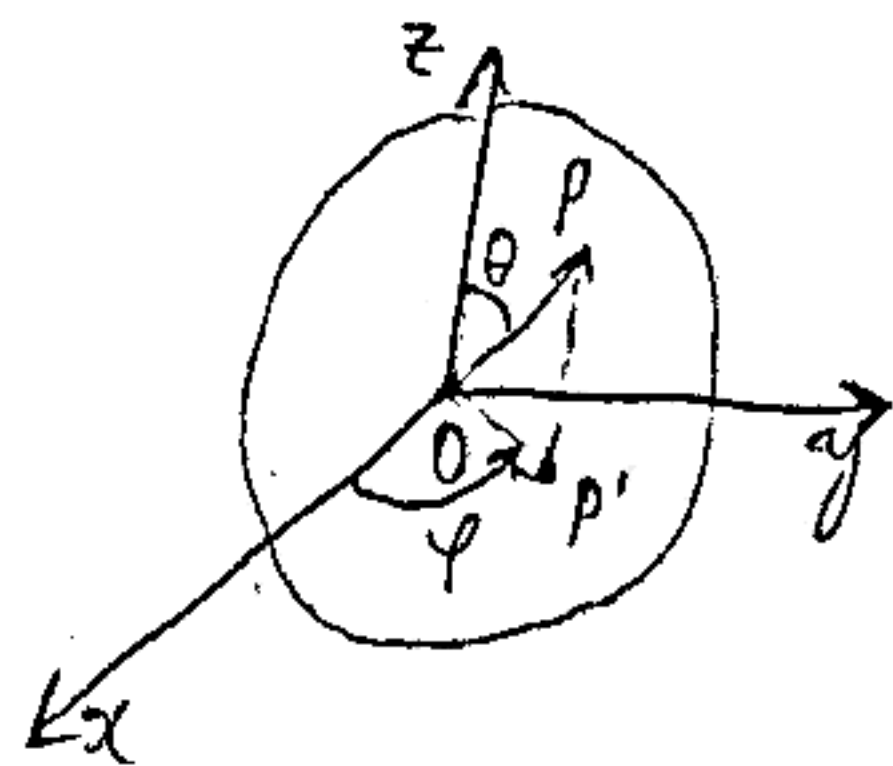
Ако $C \neq O$, то аналогично

$$S: \begin{cases} x = \alpha + R \sin \theta \cos \varphi \\ y = \beta + R \sin \theta \sin \varphi \\ z = \gamma + R \cos \theta \end{cases}$$

Заб. Северният и южният полюси се получават за много стойности на параметрите:

северният: $(0, 0, R)$ за $\theta = 0$ и $\forall \varphi$

южният: $(0, 0, -R)$ за $\theta = \pi$ и $\forall \varphi$



2. Цилиндър

Опр. Нека c е крива, а ℓ е права. Поверхтината S , състояща се от точните върху правите, които минават през няка точка на c и са успоредни на ℓ , се нар. цилиндрична повърхнин. c се нарича управляваща крива на S , а правите - образувателни на S .

Параметрични уравнения:

Нека c има параметрични уравнения

$$c: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \theta(t) \end{cases}, t \in I$$

взимаме

$$v(a, b, c) \parallel \ell$$

$\neq \vec{0}$

$$\Rightarrow S: \begin{cases} x = \varphi(t) + \lambda a \\ y = \psi(t) + \lambda b \\ z = \theta(t) + \lambda c \end{cases}, t \in I, \lambda \in \mathbb{R}$$

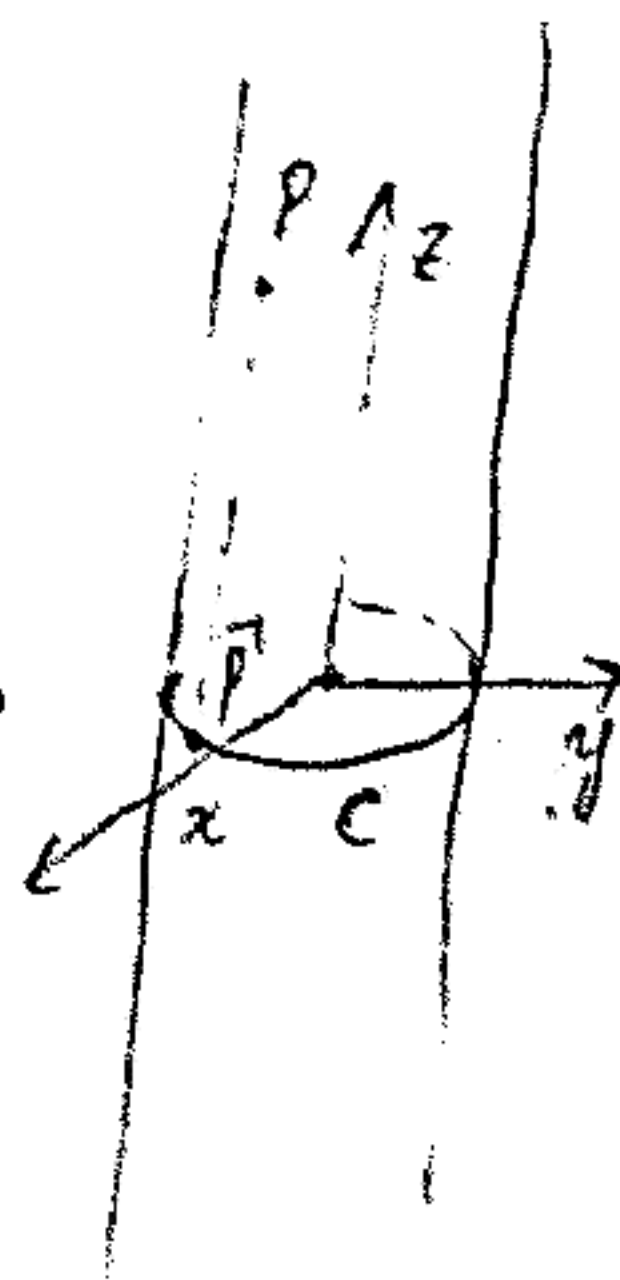
Частен случай:

c - окръжност, $\ell \perp$ равн. на c

Тогава S се нарича прав кръгов цилиндър

Нека O - център на c , $Oz \perp$ равн. на c , която е Oxy , R - радиус на c .

$$\Rightarrow c: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$



$$P(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \text{орт. проекция } P'(x, y, 0) \in c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$$

$\Rightarrow$ спрямо K S има уравнение $S: x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow$ цилиндърите са повърхнини от втора степен.

3. Конус

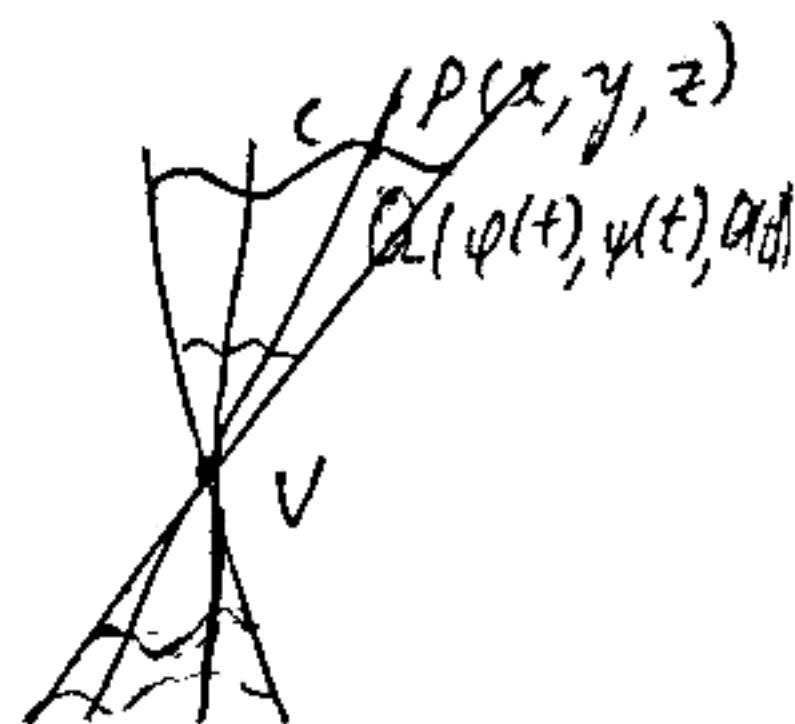
Опр. Нека c е крива, а V е точка, която не лежи на c . Множеството от точки, лежащи в-ху правите през V и някаква точка на c се нарича конична повърхност. Озн. Σ е S .

V - връх на S

c - управляваща крива на S

Параметрично уравнение:

Нека $c: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \theta(t) \end{cases}, t \in I$ и $V(a, b, c)$



$$\Rightarrow S: \begin{cases} x = a + \lambda(\varphi(t) - a) \\ y = b + \lambda(\psi(t) - b) \\ z = c + \lambda(\theta(t) - c) \end{cases}, \begin{matrix} t \in I \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Ако $V=0 \Rightarrow a=b=c=0$

$$\Rightarrow S: \begin{cases} x = \lambda \varphi(t) \\ y = \lambda \psi(t) \\ z = \lambda \theta(t) \end{cases}$$

Частен случай:

c - окръжност

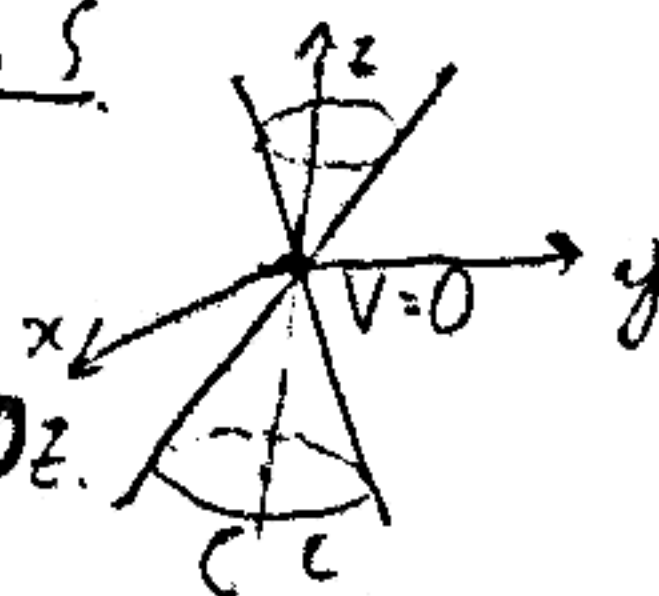
V лежи върху правата през центъра на c , която е $\perp$ на центъра на c и $V \neq$ център на c .

Тогава S се нарича прав кръгов конус

Ако c е център на c , то Vc се нарича ос на S .

K - ортоцентри: $O=V, Oz$ - ос на S

Образувачите сключват един и същ ъгъл d с Oz .
($\tan d = \frac{R}{|z|} \leftarrow \text{const}$)



$$P \in S \Leftrightarrow \angle(OP, O_z) = \alpha$$

$$P(x, y, z) \Rightarrow \text{tg } \angle(OP, O_z) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|z|}$$

$$P \in S \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|z|} = \text{tg } \alpha =: a > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2 z^2$$

$$\Rightarrow S: x^2 + y^2 = a^2 z^2, \text{ където } a = \text{tg } \alpha > 0$$

$\Rightarrow$ правилен кръгов конус е повърхнината от втора степен

4. Конични сечения (без доказателства)

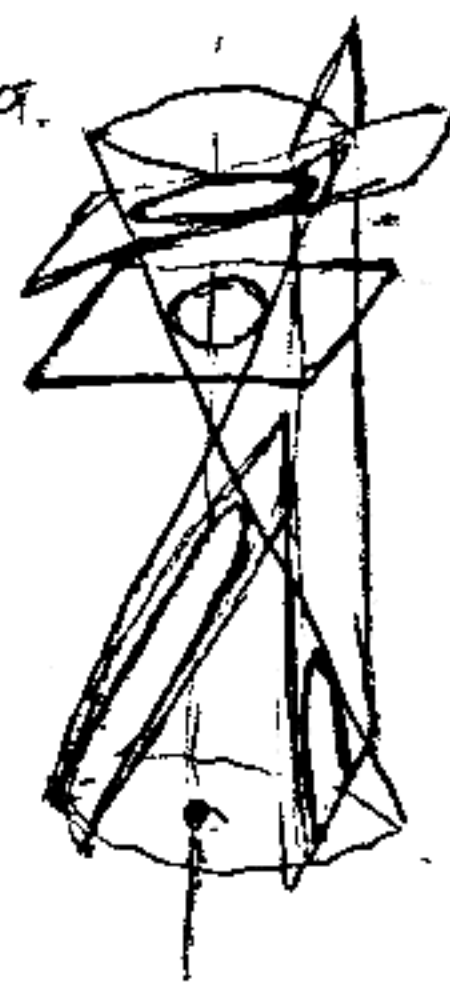
Окръжността, елипсата, хиперболата и параболата се наричат общо конични сечения, защото всяка от тях може да се получи като сечение на прав кръгов конус с равнина, която не минава през върха.

Ако равнината е $\perp$ на оста, получаваме окръжност.

Ако наклоним малко равнината, получаваме елипса.

Ако наклоним равнината, така че да е успоредна на някоя образувача, получаваме парабола.

Ако наклоним още равнината, получаваме хипербола.



24. Реално проективно пространство

Точките, правите и равнините в пространството, с които работим дотук, ще наричаме крайни.

Ще въведем допълнителни точки, прави и равнини, които ще наричаме безкрайни.

Знаем, че успоредността на прави е релация на еквивалентност в множеството на правите.

За права ℓ означ. с $\mathcal{U}_\ell$ класът на еквивалентност на ℓ .

(т.е. $\mathcal{U}_\ell =$ множеството от $\forall$ прави $l(\ell)$). Ще се нарича Безкрайности 102

точка на правата l . Множеството от всички крайни и безкрайни точки се нарича разширено пространство или реално проективно пространство.

~~Прави~~ Прави:

1) Нека l е крайна права. Озн. $\bar{l} = l \cup \{u_l\}$. $\bar{l}$ се нарича разширена крайна права.

2) Нека π е крайна равнина. Озн. $u_\pi = \{u_l : l \parallel \pi\}$. u_π се нарича безкрайна права на равнина π .

Правите в разширеното пространство (т.е. проективните прави) са всички разширени крайни прави и всички безкрайни прави.

Равнини:

1) Нека π е крайна равнина. Озн. $\bar{\pi} = \pi \cup u_\pi$. $\bar{\pi}$ се нарича разширена крайна равнина.

2) Озн. $\Omega = \{u_l : l \text{ е крайна права}\}$. Ω се нарича безкрайна равнина, т.е. Ω е множеството на всички безкрайни точки.

Т-ма В реалното проективно пространство са в сила:

- 1) През две различни точки минава точно една права
- 2) През три точки, които не лежат на една права, минава точно една равнина
- 3) През права и нележаща на нея точка минава точно една равнина
- 4) Всеки две различни равнини се пресичат по права
- 5) Права и равнина или се пресичат в точно една точка, или правата лежи в равнината.
- 6) Две различни прави или се пресичат в една точка, или не лежат в една равнина

Реална проективна равнина

Всичко е като в реалното проективно пространство, но няма равнини.

Точките са крайните точки и безкрайните точки на крайните прави.

Правите са разширените крайни прави и безкрайната права ω , съдържаща се от всички безкрайни точки.

Т-ма 1 В разширената равнина (реалната проективна равнина) са в сила:

- 1) През всеки две различни точки минава точно една права
- 2) Всеки две различни прави се пресичат в точно една точка.

Д-во

1) P_1 и P_2 - различни точки

(а) P_1 и P_2 са крайни. Нека ℓ е крайната права, определена от P_1 и P_2 .

$\Rightarrow P_1, P_2 \in \bar{\ell} = \ell \cup \{\omega\} \Rightarrow$ имаме съществуване

Нека a е права: $P_1, P_2 \in a$

$\Rightarrow a$ е разширена крайна права, защото ω не съдържа крайни точки

$\Rightarrow a = \bar{m}$ за m -крайна $\Rightarrow P_1, P_2 \in a = \bar{m} = m \cup \{\omega_m\}$

$\Rightarrow P_1$ и $P_2 \in m$ (защото са крайни)

$\Rightarrow m$ е крайната права през P_1 и P_2 . $\Rightarrow m = \ell \Rightarrow a = \bar{\ell}$

$\Rightarrow$ установяване единственост.

(б) P_1 -крайна, P_2 -безкрайна

Нека $P_2 = \omega$. Нека m е крайната права през P_1 , която е

$\parallel \ell$. $\Rightarrow \omega_m = \omega$

$\Rightarrow P_1 \in \bar{m} = m \cup \{\omega_m\}$

$\omega = P_2$

$\Rightarrow$ имаме съществуване.

Единственост:

Нека $a: P_1, P_2 \in a$. $P_1 \in a$, P_1 -крайна $\Rightarrow a \neq \omega \Rightarrow a = \bar{n}$ за някаква крайна права n .

$$\Rightarrow P_1, P_2 \in \bar{n} = n \cup \{u_n\}$$

$$P_1\text{-крайна} \Rightarrow P_1 \in n$$

$$P_2\text{-безкрайна} \Rightarrow P_2 = u_n$$

$$\Rightarrow \ell(n) \Rightarrow n \text{ е през } P_1 \text{ и } e \in \ell$$

$$\Rightarrow n = m \Rightarrow a = \bar{n} = \bar{m} \Rightarrow \text{единственост}$$

(b) P_1 и P_2 -безкрайни.

$$\Rightarrow P_1, P_2 \in \omega \Rightarrow \text{няма съществуване}$$

и P_1 и P_2 не лежат на никаква разширена крайна права, защото разн. крайни прави съдържат само една безкрайна точка $\Rightarrow$ няма единственост.

09.01.2019 22. Проективни координатни системи и
проективни координати

1. Проективната равнина P_2

Опр. Нека $E_0, E_1, E_2, E_3 \in P_2$ са точки, никой три от които не са на една права. Нека Oe_1, e_2 е афинна коорд. система и спрямо нея е изборен по един нормализиран афинен коорд. $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}^3$ (стълбове) на E_1, E_2, E_3 .

Казваме, че m_1, m_2, m_3 са нормализирани отн. E_0 , ако $m_1 + m_2 + m_3$ са хомогенни афинни коорд. спрямо Oe_1, e_2 на E_0 .

Тв.1 В ситуацията от деф. $\exists$ норм. коорд на E_1, E_2, E_3 отн. E_0 и са единствени с точност до общ множител, т.е. ако m_1, m_2, m_3 са такива, то всевъзможните нормизирани са $\rho m_1, \rho m_2, \rho m_3$, където $\rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0$.

Опр. Проективна коорд. система K в P_2 е наредена четворка от точки (E_0, E_1, E_2, E_3) , такива че никой три от тях не са на една права. Линейн $K = E_0 E_1 E_2 E_3$.
 E_1, E_2, E_3 се наричат върхове на K , а E_0 - единичната точка.

Опр. Нека $K = E_0 E_1 E_2 E_3$ е проективна коорд. система и $T. P \in P_2$. Нека Oe_1, e_2 е афинна коорд. система и $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}^3$ (стълбове) са нормизирани по отношение на E_0 - хомогенни афинни коорд. спрямо Oe_1, e_2 на E_1, E_2, E_3 .
Нека $y \in \mathbb{R}^3$ са хомогенни афинни коорд. на P спрямо Oe_1, e_2 . Тогава $\exists! x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}: y = x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3$ (законът ~~за~~ m_1, m_2, m_3 е базис на $\mathbb{R}^3$, защото E_1, E_2, E_3 не са на една права).

(x_1, x_2, x_3) се наричат хомогенни проективни коорд. на P спрямо K . Ако $\text{отн. } M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ \text{отн. } e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$ - матрица 3×3

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

то $y = x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3$ е еквивалентно на $y = Mx$.

Заб. 1) Ако $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$, то py също са хомогенни афинни коорд. на P спрямо O, e_1, e_2 . Той като $py = M(px) \Rightarrow$ и px са проективни коорд. на P спрямо K .

2) Деф. е коректна, т.е. не зависи от избора на O, e_1, e_2 и от избора на норм. отн. E_0 коорд. m_1, m_2, m_3 на E_1, E_2, E_3 спрямо O, e_1, e_2 .

3) Ако $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, то x е проект. коорд. за някая точка $P \in P_2$, а именно на точката с хомогенни афинни коорд. спрямо O, e_1, e_2 $y = Mx$

($y \neq 0$, защо $x \neq 0$, M - обратима $\Rightarrow y$ хомог. афинни коорд. на някая точка). Ако P е точка и x са проективни коорд., то $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, защото $y = Mx$ и $y \neq 0$.

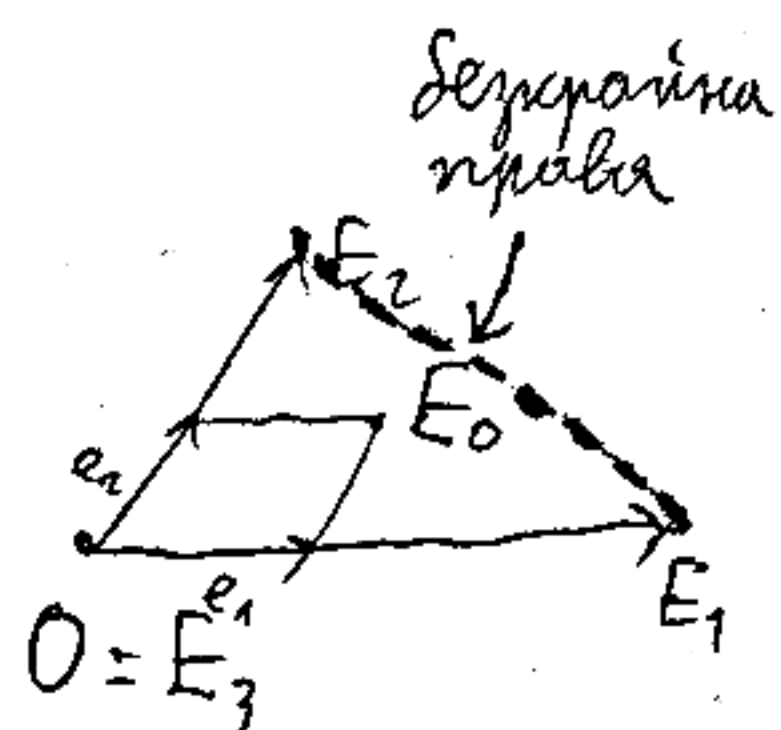
4) Проект. коорд. на E_0, E_1, E_2, E_3 отн. K са $E_1(1, 0, 0), E_2(0, 1, 0), E_3(0, 0, 1), E_0(1, 1, 1)$ (защото E_0 е наричана единична точка).

Тв. 2 Нека T, P има спрямо проект. коорд. система K проект. коорд. $x \in \mathbb{R}^3$. Тогава $x' \in \mathbb{R}^3$ също са проективни коорд. на P спрямо $K \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{R}, p \neq 0: x' = px$.

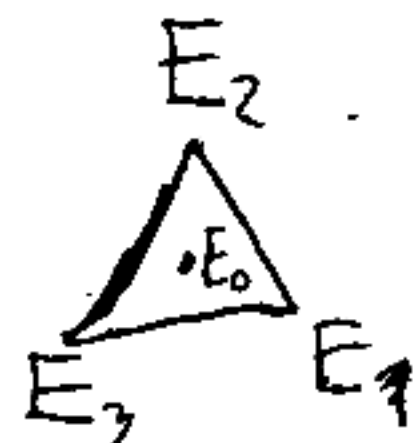
Тв. 3 Нека O, e_1, e_2 е афинна коорд. система. Отн. z E_1 и E_2 107

Безкрайните точки на коорд. оси Oe_1 и Oe_2 , $E_3=O$, E_0 да е точката с канонични афинни коорд. отн. Oe_1, e_2 $(1,1,1)$ (или еквив. с некан. коорд. $(1,1)$ спрямо Oe_1, e_2).
Тогави $K = E_0E_1E_2E_3$ е проективна коорд. система и проективните коорд. спрямо K съвпадат с каноничните афинни коорд. спрямо Oe_1, e_2 .

Тв.4 В проективни коорд. общите уравнения и параметричните уравнения на правите имат същия вид като в канонични афинни. Също теоремата за взаимно перпендикулярност на две ~~канонични~~ прави има същия вид.



Опр. Нека $K = E_0E_1E_2E_3$ е проект. коорд. система и E_0', E_1', E_2', E_3' са четири точки, никой три от които не лежат на една права.



E_1, E_2 и E_3 могат да са крайни при ~~канонични~~ проективни коорд. с.

Нормирани отн. E_0' проективни коорд. на E_1', E_2', E_3' спрямо K се деф. по същия начин, като при каноничните афинни коорд.

Валиден и аналог на тв.1 за $\exists$ и единственост с точност до общ ненулев множител.

Тв.5 1) Нека $K = E_0E_1E_2E_3$ и $K' = E_0'E_1'E_2'E_3'$ са проективни коорд. системи, T е матрица 3×3 , състоите на която са норм. отн. E_0' проект. коорд. на E_1', E_2', E_3' спрямо K .

Нека $T, P \in P_2$ има спрямо K и K' проект. коорд. съотв. $x \in \mathbb{R}^3$ и $x' \in \mathbb{R}^3$ (свързване). Тогави $\exists r \in \mathbb{R}, r \neq 0: x = rTx'$.

2) Нека K е проект. коорд. система и T е обратима реална 3×3 - матрица. Тогави $\exists!$ проективна коорд. система K' , 108

за която връзката между коорд. спрямо K и K' е
връзката от 1) (за дадената T).

При това, ако $\tilde{T}$ е друга обратима матрица 3×3 и:

$\tilde{K}'$ е соотв. ѝ проективна коорд. система, то $\tilde{K}' = K'$.
 $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0: \tilde{T} = \lambda T.$

2. Проективната права P_1

Проективната коорд. система $K = E_0, E_1, E_2$ е наредената
тройка (E_0, E_1, E_2) , която са различни. Проект. коорд. се
задават като в P_2 , но са 2 (а не 3)

3. Проективното пространство P_3

Проект. коорд. система $K = E_0, E_1, E_2, E_3, E_4$ е наредената
петорка $(E_0, E_1, E_2, E_3, E_4)$, които 4 от които не са в една
равнина.

Проективните коорд. се деф. като в P_2 , но са 4, а не 3.

Тв. 4. се отнася до парам. ур. и общите уравнения на
равнини, парам. ур. и двойките уравнения на прави и
за условията за взаимно положение на равнини.

28. Проективни трансформации

Работим едновременно в проективното простр. P_3 ($n=3$),
проект. равн. P_2 ($n=2$) и върху проективна права P_1 ($n=1$).

Нека $K = E_0, E_1, \dots, E_{n+1}$ е проект. коорд. система в P_n .

Опр. 1 Изображението $L: P_n \rightarrow P_n$ се нарича проективна
трансформация, ако съществува обратима реална $(n+1) \times (n+1)$
матрица T такава, че е изпълнено:

Ако x, P има спрямо K проект. коорд. $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, то $y = Tx$ (09

са проективни коорд. спрямо K на $L(P)$ (x, y - стойности).
Кажем, че L се задава спрямо K с уравнение $y = Tx$
и пишем $L: y = Tx$

Коректност

1) $x \neq \vec{0} \Rightarrow y = Tx \neq \vec{0}$, защото T е обратима $\Rightarrow y$ наистина е проект. коорд. на някаква точка

Ако x' са други проективни коорд. на P , то $x' = rx$ за някое $r \neq 0$.

$\Rightarrow y' = Tx' = r \cdot Tx = r \cdot y \Rightarrow y'$ са проективни коорд. на точката с проективни коорд. y .

2) Ако вземем друга ~~коорд.~~ коорд. система V' , то проективната трансформация пак се задава с умножение с матрица по група.

Ако преходът между K и K' се дава с матр. S , т.е. за коорд. $x = Sx' \Rightarrow Sy' = y = Tx = TSx' \Rightarrow y' = S^{-1}TSx'$
 $\Rightarrow$ спрямо K' L се задава с матрица $S^{-1}TS$.

Тпр. 1 Тонг. изобретение $id: P_n \rightarrow P_n$ се задава с единичната матрица E . $p \mapsto p$

Опр. 2 Изобр. $L: P_n \rightarrow P_n$ се нарича проективна трансформация, ако съществува проективна к.с. K , така че за произволно $P \in P_n$, ако P има спрямо K коорд. x , то $L(P)$ има спрямо K' същите коорд. x .
(продължение)

Тпр. 1 id е проективна трансформация по втората деф. взимаме $K' = K$.

Тл. 1 Двете дефиниции са еквивалентни

Д-во Нека $L: y = Tx$ е проект. транс. по първата деф.

Нека K' е проект. коорд. с-ма, която се получава от K чрез матр. T т.е. за коорд. $x = Tx'$, и $\Rightarrow x' = T^{-1}x$.

Нека т. P има коорд. x спрямо K . $\Rightarrow L(P)$ има коорд.

$y = Tx$ спрямо K . $\Rightarrow L(P)$ има коорд. $y' = T^{-1}y = T^{-1}Tx = x$ спрямо K' .

Значи L е проективна трансформация по втората деф. и нека преходът от K към K' се дава с матрицата T , т.е. за коорд. $x = Tx'$.

Нека P има коорд. x отн. K . Значи $L(P)$ има коорд. $y' = x$ отн. K' . Тогава $L(P)$ има коорд. $y = Ty' = Tx$ отн. K . $\Rightarrow L$ е проект. транс. по първата деф. $\square$

Тв. 2 1) Ако L_1 и L_2 са проективни трансформации, които спрямо K се задават с ~~матр.~~ матрици T_1 и T_2 , то $L_2 \circ L_1$ ~~е~~ е проект. транс., която спрямо K се задава с $T_2 T_1$.

2) Ако L е проект. трансф., която спрямо K се задава с T , то L е обратима изобр. и L^{-1} е проект. трансф., която спрямо K се задава с T^{-1} .

Д-во 1) P -коорд. x отн. K

$\Rightarrow L_1(P)$ - коорд. $T_1 x$ отн. K

$\Rightarrow L_2(L_1(P))$ - коорд. $T_2(T_1 x) = (T_2 T_1)x = L_2 \circ L_1(P)$

$\Rightarrow L_2 \circ L_1$ се задава с ур. $y = (T_2 T_1)x$

$\Rightarrow L_2 \circ L_1$ е проективна трансформация, защото $T_2 T_1$ е обратима, защото T_1 и T_2 са обратими

2) Нека Q има спрямо K коорд. y . Тогава $y = Tx \Leftrightarrow$

$T^{-1}y = x \Rightarrow \exists ! \text{ т. } P: L(P) = Q$, а именно т. P с коорд.

$x = T^{-1}y$ отн. K .

$\Rightarrow L$ е обратимо и $L^{-1}: x = T^{-1}y$

$\Rightarrow L^{-1}$ е проект. трансф., съответна на T^{-1} .

Заб. Ако не ни интересуват матриците, можем да изразим
ме втората деф:

L_1 се задава с K и K' : т.Р с коорд. x отн. K отива в т.
с коорд. x' отн. K' . Нека L_2 се задава с K' и K'' , т.е.
т. с коорд. x' отн. K' отива в т. с коорд. x'' отн. K'' .

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{L_1} & L_1(P) & \xrightarrow{L_2} & L_2(L_1(P)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x \text{ отн. } K & & x' \text{ отн. } K' & & x'' \text{ отн. } K'' \end{array}$$

$\Rightarrow L_2 \circ L_1$ е проективната трансформация, деф. с K и K'' .

Ако $L: P$ с коорд. x отн. $K \Rightarrow$ т. с коорд. x' отн. K' .

$\Rightarrow \exists L^{-1}: \text{т. с коорд. } x' \text{ отн. } K' \rightarrow \text{т. с коорд. } x \text{ отн. } K$

$\Rightarrow L^{-1}$ е проект. транс. деф. с K' и K .

Тв 3 1) Ако L е проект. трансф., която спрямо K се задава с
матр. T , то $L = \text{id} \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}, r \neq 0: T = r \cdot E$

2) Ако L_1 и L_2 са проект. трансф., които спрямо K се зада-
ват съотв. с матр. T_1 и T_2 , то $L_1 = L_2 \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}, r \neq 0: T_2 = r T_1$

D-во

1) ($\Rightarrow$) Пропускане

($\Leftarrow$) Ако вземем P с коорд. x спрямо K , то $L(P)$ има
коорд. $y = Tx = r \cdot Ex = r \cdot x \Rightarrow L(P) = P \Rightarrow L$ е идентитетът

2) Знаем $L_1 = L_2 \Leftrightarrow L_2^{-1} \circ L_1 = \text{id}$. По тв. 2 $L_2^{-1} \circ L_1$ е
проективна трансформация с матрица $T_2^{-1} \circ T_1$

От 1) $\Rightarrow L_1 = L_2 \Leftrightarrow T_2^{-1} T_1 = r E$ за някоя $r \neq 0 \Leftrightarrow T_1 = r \cdot T_2$ за
някоя $r \neq 0$.

Тв. 4 При проективна трансформация образът на права е права и образът на равнина е равнина

Д-во Нека L е проект. трансф. зададена с K и K' .
 Нека α е права или равнина. Взимаме уравн. на α спрямо K (парам., или общо, или двойка уравнения).
 Точките от α са онези, чийто коорд. отн. K удовл. тези уравнения. Тъй като коорд. на $L(P)$ отн. K са същите като коорд. на P отн. K , то точките от $L(\alpha)$ са онези, чийто коорд. отн. K' удовлетворяват същите уравнения.
 Тъй като това са уравнения на права или равнина отн. K' , то $L(\alpha)$ е права (или равнина). $\square$

Тв. 5 1) Ако α и α' са прави, то $\exists$ проект. трансф. L :

$$L(\alpha) = \alpha'$$

2) Ако d и d' са равни., то $\exists$ проект. трансф. L :

$$L(d) = d'$$

Д-во 1) Нека $K: E_1, E_2 \in \alpha$
 $K': E'_1, E'_2 \in \alpha'$

Нека L е ~~дефинирана~~ дефинирана с K и K' (проект. трансф.).

$$\left. \begin{array}{l} E_1 \xrightarrow{L} E'_1 \\ E_2 \xrightarrow{L} E'_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{по тв. 4} \quad \underbrace{\text{правата } E_1 E_2}_{\alpha} \xrightarrow{L} \underbrace{\text{правата } E'_1 E'_2}_{\alpha'}$$

2) Нека $K: E_1, E_2, E_3 \in d$
 $K': E'_1, E'_2, E'_3 \in d'$

L - проект. трансф. от K в K'

$$\Rightarrow E_1 \xrightarrow{L} E'_1, E_2 \xrightarrow{L} E'_2, E_3 \xrightarrow{L} E'_3. \quad \text{От тв. 4} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\text{равн. } E_1, E_2, E_3}_{\alpha} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \underbrace{\text{равн. } E_1', E_2', E_3'}_{\alpha'}$$

31. Афинни и метрични трансформации
 Работим едновременно в пространството A_3 ($n=3$), в
 равнината A_2 ($n=2$) и върху права A_1 ($n=1$)

Нека $K = Oe_1, \dots, e_n$ е афинна коорд. система. Когато говорим
 за метрични трансформации, ще считаме, че коорд.
 системи са ~~само~~ ортогонализиращи (в частност и K).

Коорд. - нехомогенни

Опр. 1. Изобр. $L: A_n \rightarrow A_n$ се нарича афинна ^{соотв.} метрична
 трансформация, ако $\exists$ реална обратима (соотв. орт.)
 $n \times n$ матрица T и вектор $s \in \mathbb{R}^n$, така че:

Ако т. P има коорд. $x \in \mathbb{R}^n$ отн. K , то т. $L(P)$ има коорд.
 $y = Tx + s$ отн. K . В тази ситуация казваме, че L се задава
 спрямо K с ур. $y = Tx + s$ и нпишем $L: y = Tx + s$.
 (метрична трансформация = ефикасност).

Коректност (Независимост от K) ~~само~~ спрямо $K' \neq K$ L
 има същият вид, но с T' и s'
~~израз~~

Пр. 1

- 1) $\text{id}: A_n \rightarrow A_n$ е афинна и метр. трансф. ($T=E, s=\vec{0}$)
- 2) Ако $L: y=x+s$, т.е. $T=E$, но $s \neq \vec{0}$, то L също е афинна
 метрична трансформация
 L -трансформация с s

Опр. 2 Изобр. $L: A_n \rightarrow A_n$ се нарича афинна (метрична)

трансф., ако $\exists$ афинна (евклидова) коорд. система K , тогава
Ако т. P има коорд. в-р. x спрямо K , то $L(P)$ има
коорд. в-р x' спрямо K' .

Тр. 1 (продължение)

1) id се задава с $K' = K$

Тв. 1 Двете деф. са еквивалентни

До Аналогично на това за проективните трансформации, защото афинните и метричните трансформации се задават със същата ф-ла като смятат на афинна коорд. система $\square$

Тв. 2 1) Композицията на афинни (евкл. метрични) трансф. е афинна (евкл. метрична) трансф.

2) А афинна (евкл. метр.) трансф. е обратима и обратната също е афинна (евкл. метр.)

Д-во като за проективните трансф., напр. Второто док.

Тв. 3 Всяка метрична трансформация е и афинна

Д-во Всяка ортогонална матрица е и обратима

Тв. 4 При афинна трансф. образът на права е права, а образът на равнина е равнина.

Д-во като при проект. трансформации

Тв. 5 1) Ако a и a' са прави, то $\exists$ метр. трансф. $L: L(a) = a'$

2) Ако d и d' са равнини, то $\exists$ метр. трансф. $L: L(d) = d'$

Д-во 1) K, K' - ортонорм.: $Oe_1 = a$, $Oe_2 = a'$ и L - определен от K и K'

2) Аналогично $\square$

Тв. 6 Нека $L: A_n \rightarrow A_n$ е афинна трансф. Тогава $\exists!$ проект. трансф. $\bar{L}: P_n \rightarrow P_n$, за която $\bar{L}|_{A_n} = L$, т.е. $\bar{L}(P) = L(P)$ за $P \in A_n$.

Д-во Ако L в нехомогенни коорд. отн. K се дава с $x' = Tx + s$, то в хомогенни коорд. се дава с $x' = \begin{pmatrix} T & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$

От тв. 3 $\Rightarrow$ тв. 4 и тв. 6 важат и за метрични трансформации, а тв. 5 — и за афинни.

16.01.2019 29. Фигури от втора степен. Полярност.

Работим едновременно в проективната равнина P_2 и в проективното пространство P_3 .

K - проект. коорд. система

$x_1, \dots, x_{n+1}$ - проективни коорд. от K

Нека $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n+1$ е ненулева реална симетрична матрица. Озн. $F(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j$ - соотв. на A

квадратична форма. Ако озн. $x = (x_1, \dots, x_{n+1})^T$, то $F(x) = x^T A x$

Озн. Множеството q , което в проективната коорд. система спрямо K има уравнение $q: F(x) = 0$, се нарича фигура от втора степен (при $n=2$: крива от втора степен, а при $n=3$: повърхност от втора степен).

Коректност:

1) Ако P има проект. коорд. x спрямо K , то произв. проект. коорд. на P спрямо K са rx , където $r \neq 0$. Тъй като $F(rx) = r^2 F(x)$, то $F(x) = 0 \Leftrightarrow F(rx) = 0 \Rightarrow F(x) = 0$ не зависи от избора на проект. коорд. на P

2. Спрямо друга коорд. система K' q се задава пак с квадратична форма, но с друга матрица:

Ако смяната е $x = T x'$, то $x^T A x = (T x')^T A (T x') =$

$= x'^T (T^T A T) x'$, т.е. квадр. форма съответства на матрицата $A' = T^T A T$

Заб. В деф. се допускат и комплексни точки, т.е. точки с комплексни координати (т.е. разширим сме P_n до комп. леко проективно пространство).

Тв.1 Матриците A и B уредват една и съща форма от втора степен $\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : B = rA$

Дво (а) е очевидно:

$$x^T B x = 0 \Leftrightarrow r \underset{\neq 0}{x^T A x} = 0 \Leftrightarrow x^T A x = 0$$

$\Rightarrow$ пропуснаме

Заб. Правата посока на тв.1 изключва точки с комплексни координати $\square$

Пр. $n=2$, $A=E=(1 \ 1)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 = 0$ няма реални решения

$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1^2 = 0$ отново няма реални решения

$\Rightarrow A$ и B задават $\{ \}$, но не са пропорционални

Опр. Точката $P_0(x_0)$ се нарича осодена за q , ако $Ax_0 = \vec{0}$.

q се нарича осодена, ако има осодена точка.

Заб. Деф. е коректна, т.е. не зависи от избора на проективни координати, от избора на матр. A , задаваща q , и от избора на проект. коорд. система K .

Тв.2 q е осодена $\Leftrightarrow A$ е неинвертирна

Дво $Ax=0$ има ненулево решение $\Leftrightarrow \det(A)=0$ $\square$

Опр. За $i=1, \dots, n+1$ геор. $F_i(x) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}$. Наричат се наизпроизводни на F .

Тв.3 (Формула на Ойлер) $F(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x) x_i$

Тв.4 $P(x)$ е осодена $\Leftrightarrow F_i(x) = 0, i=1, \dots, n+1$.

Дво Системата $F_i(x) = 0, i=1, \dots, n+1$ е всъщност $Ax=0$ $\square$

Тв. 5 Ако P е особена за q , то $P \in q$

Д-во Ако $P(x) \Rightarrow Ax=0 \Rightarrow F(x)=0$

Опр. За $x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$ опи. $F(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i y_j = x^T A y$

Това е билинейната форма, съответна на квадратичната форма F .

Тв. 6 $F(x, x) = F(x, x)$ и $F(y, x) = F(x, y)$ и $F(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n+1} F_{ij}(x) y_j$

Опр. Точките $P(x)$ и $Q(y)$ се наричат спрегнати относно q , ако $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow F(y, x) = 0$

Зам. Деф. е коректна

Тв. 7 т. P е спрегната с себе си $\Leftrightarrow P \in q$

Тв. 8 Всяка особена точка е спрегната с всяка точка

Тв. 9 Нека $P_0(x_0)$ е неособена за q . Тези точки от спрегнатите с P_0 точки е правата при $n=2$ или равн. при $n=3$ с уравнение $\sum_{i=1}^{n+1} F_i(x_0) x_i = 0$.

Д-во Ако $P(x)$, то $P \in \pi_0 \Leftrightarrow P_0$ и P са спрегнати $\Leftrightarrow$

$$F(x_0, x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} F_i(x_0) x_i = 0 \Rightarrow \pi_0: \sum_{i=1}^{n+1} F_i(x_0) x_i = 0.$$

Това е уравнение на ~~пр~~ права (при $n=3$ равнина), защото P_0 е неособена и $\Rightarrow$ поне едно $F_i(x_0) \neq 0$.

Опр. Ако P_0 е неособена за q , то правата при $n=2$ или равн. при $n=3$, състояща се от спрегнатите на P_0 спрямо q точки, се нарича паяра на P_0 спрямо q .

Ако P_0 е особена за q , то смятаме, че всяка права (сост. равнини) е паяра на P_0 спрямо q .

2) Ако π_0 е паяра на т. P_0 , то казваме, че P_0 е паяс на π_0

Сл. 1 Всяка особена точка е полюс на всяка права (равнина);

Тв. 10 Ако P е особена точка, то P принадлежи на всяка права или $\Leftrightarrow P \in q$ (от тв. 7)

Тв. 11 Ако P е особена точка, то поларата ѝ е дървена всяка особена точка (от тв. 8)

Тв. 12 Ако P_1 и P_2 са особени точки и поларите им са π_1 и π_2 , то $P_1 \in \pi_2 \Leftrightarrow P_2 \in \pi_1$.

Д-во $P_1 \in \pi_2 \Leftrightarrow P_1$ и P_2 са съвпадат $\Leftrightarrow P_2 \in \pi_1$

Тв. 13 Ако q е особена, то всяка права ($n=2$) или равнина ($n=3$) има единствен полюс.

Д-во

Нека $\pi: \sum_{i=1}^{n+1} v_i x_i = 0$ - права (равн.)

$P_0(x_0) \Rightarrow$ поларата е $\pi_0: \sum_{i=1}^{n+1} F_i(x_0) x_i = 0$

$\pi_0 = \pi \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : F_i(x_0) = r v_i, i=1, \dots, n+1$

$\Rightarrow P_0$ е полюс на $\pi \Leftrightarrow \pi_0 = \pi \Leftrightarrow \exists r \neq 0 : F_i(x_0) = r v_i, i=1, \dots, n+1$

$\Leftrightarrow \exists r \neq 0 : A x_0 = r v$, където $v = (v_1, \dots, v_{n+1})^T \Leftrightarrow$ (зрещото A е обратима) $\exists r \neq 0 : x_0 = r A^{-1} v$. $A^{-1} v \neq \vec{0}$, защото $v \neq \vec{0}$ и

A е обратима $\Rightarrow A^{-1} v$ са коорд. на някаква точка.

$\forall r \neq 0$ $r A^{-1} v$ са проект. коорд. на същата точка.

$\Rightarrow \exists!$ полюс на π , а именно P_0 с коорд. $x_0 = A^{-1} v$.

Сл. 1 Ако q е особена, то изображението, при което всяка точка се изпоставя поларата ѝ, е диекция между множествата на точките и на правите (соотв. равнините) в P_n .

Тв. 14 При $n=2$: Ако т. P_1 и P_2 не са особени за q и

полярите им са различни, то пресечната точка на π_1 и π_2 е полюс на правата P_1P_2

Д-во Два полярите са различни, то $P_1 \neq P_2 \Rightarrow P_1$ и P_2 задават права. Нека $P_0 = \pi_1 \cap \pi_2$.

Ако P_0 е особена, то тя е полюс на всяка права $\Rightarrow$ е полюс на P_1P_2 .

Нека P_0 е неособена и нека π_0 е полярата ѝ. $P_0 \in \pi_1$
 $\stackrel{12}{\Rightarrow} P_1 \in \pi_0$.

Аналогично $P_0 \in \pi_2$ вие $P_2 \in \pi_0$.

$\Rightarrow \pi_0 = P_1P_2$

$\Rightarrow P_0$ е полюс на P_1P_2 .

Опр. 1) Ако т. $P \in q$ не е особена за q , то полярата на P се нарича допирателна на q в P . (при $n=3$ се казва допирателна равнина)

2) Полярата на безкрайна точка, която не е особена за q , се нарича диаметър (соотв. диаметрална равнина)

3) Всеки полюс на безкрайната права (соотв. равнина) се нарича център на q .

4) Допирателна на q в безкрайна точка се нарича асимптота на q (соотв. асимптотична равнина)

Тв. 15 Всеки диаметър минава през всеки център на q .
(от тв. 11 и тв. 12)

Тв. 16 Всяка асимптота е диаметър и $\Rightarrow$ минава през всеки център.

Тв. 17 Всяка особена точка на q е център на q .

Тв. 18 Нека K е афинна коорд. система. Тогава в хом. афинни коорд. спрямо K имаме:

Т. $P_0(x_0)$ е център на $q \Leftrightarrow F_i(x_0) = 0, i=1, \dots, n$ (без последната)
D-во Ако P_0 е особена, то тя е център и всички полупро-
 изводни се аннулират в P_0 .

Нека P_0 е неособена. Тогава P_0 е център $\Leftrightarrow$ правата π
 P_0 е безкрайната права (равн.)

$$\pi_0: \sum_{i=1}^{n+1} F_i(x_0)x_i = 0$$

Това е безкрайната права (своб. равн.), която $F_i(x_0) = 0, i=1, \dots, n$
 и $F_{n+1}(x_0) \neq 0$. Но тъй като P_0 е неособена, то от условието $F_i(x_0) = 0$,
 $i=1, \dots, n$ автоматично следва, че $F_{n+1}(x_0) \neq 0$.

Значи P_0 е център $\Leftrightarrow \pi_0$ е безкрайната права (равнина).
 $\Leftrightarrow F_i(x_0) = 0, i=1, \dots, n$. □

30. Проективна класификация на фигурите от втора степен

Работим едновременно в проективната равнина P_2 и
 проективното пространство P_3 .

опр. Фигурите от втора степен q и q' се наричат
проективно еквивалентни $\Leftrightarrow \exists$ проективна трансформация

$$L: L(q') = q.$$

Тв.1 Проект. еквив. е рел. на еквив. в множеството от фи-
 гурите от втора степен

D-во

рефлексивност: id е проект. трансформация

симетричност: обратната на проективна трансформация
 е също проективна трансф.

транзитивност: от това, че композиция на проект. трансф е

проект. транс.

Опр. Двамата са еквивалентни, т.е. представят еквивалентност на фигури с една стена и наричат проективни класове.

Б.2 Нека фигурите с една стена q и q' са зададени спрямо коорд. системи K с матрици A и A' .

Това са q и q' са проективно еквивалентни $\Leftrightarrow \exists$ обр. матрица T (реална): $A' = \pm T^T A T$.

Д-во $P(x)$ и $P'(x')$ и $L: x = Tx'$

$$\Rightarrow P = L(P') \Leftrightarrow x = Tx'$$

$$P' \in q' \Leftrightarrow P = L(P') \in q = L(q') \Leftrightarrow x^T A x = 0 \Leftrightarrow x'^T (T^T A T) x' = 0$$

$$\Rightarrow q' : x'^T (T^T A T) x' = 0$$

$$\text{Но } q' : x'^T A' x' = 0 \Rightarrow \exists \rho \neq 0 : A' = \rho T^T A T.$$

$$\text{Нека } S = \sqrt{|\rho|} \cdot T \Rightarrow S \text{ също задава } L \text{ и } S^T A S = |\rho| T^T A T = 1$$
$$= \pm \rho T^T A T = \pm A'.$$

С това е доказана правата посока.

Обратната посока - по обратен път.

~~Вече~~ От LA е известно, че квадр. ф-ма

~~може~~ може чрез линейна трансформация от вида $x = Tx'$ да се приведе до каноничен вид, т.е. $x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 - x_{\lambda+1}^2 - \dots - x_{\lambda+\mu}^2$

Три това, числата λ и μ са едни и същи.

Три как това се интерпретира като факта, че $x^T A x = 0$ и

$$q' : x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 - x_{\lambda+1}^2 - \dots - x_{\lambda+\mu}^2 = 0 \text{ са проективно еквивалентни.}$$

Тъй като това може да се замени с -1 и коорд. могат да се пренумерират (което е проект. трансф.) $\Rightarrow$ ~~Вече~~ можем да

сметаме, че $\lambda \geq \mu$.

Нека $n=2$. Тогава следат 10 проективните коорд. $e_3 \Rightarrow$ имаме следните възможности:

- 1) $\lambda=3, \mu=0$
- 2) $\lambda=2, \mu=1$
- 3) $\lambda=2, \mu=0$
- 4) $\lambda=1, \mu=1$
- 5) $\lambda=1, \mu=0$

($\lambda=0, \mu=0$ не е възможно, защото $q' \cdot 0 = 0$ не е крива от втора степен).

Аналогично се доказва т-мата за проективните повърхности.

32. Афинна и метрична класификация на фигурите от втора степен

Работим в равнината A_2 и пространството A_3 .

Опр. Множеството q в A_n се нарича фигура от втора степен, ако соиз. фигура от втора степен $\bar{q}$ в P_n , така че q се състои от крайните точки в $\bar{q}$. При това, $\bar{q}$ не ~~трябва~~ трябва да съдържа безкрайната права или равнина.

Нека K е афинна к.с. в A_n :

$$\bar{q}: \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0 - \text{уравн. в хомогенни координати}$$

спрямо K . $P(x)$ е крайна $\Leftrightarrow x_{n+1} \neq 0$. Тогава $X_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}, i=1, \dots, n$.

са нехомогенни коорд. на P . Делим на x_{n+1}^2

$$\Rightarrow P \in \bar{q} \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{x_i}{x_{n+1}} \frac{x_j}{x_{n+1}} + 2 \sum_{i=1}^n a_{i,n+1} \frac{x_i}{x_{n+1}} + a_{n+1,n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n a_{ij} X_i X_j + 2 \sum_{i=1}^n a_{i,n+1} X_i + a_{n+1,n+1} = 0 \Rightarrow q: \text{корното уравнение}$$

в нехомогенни коорд. спрямо K .

$\bar{q}$ съдържа безкрайната права (равнина) $\Leftrightarrow \bar{q}$ съдържа $\forall$ безкрайна точка $\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = 0 \quad \forall x_1, \dots, x_n \Leftrightarrow a_{ij} = 0$ за $i, j = 1, \dots, n$.

Така получаваме следната евлив. деф. на фигури от втора степен.

Опр. фигура от втора степен в A_n е множество q , което спрямо K се задава с уравнението

$$q: -\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n a_{i,n+1} x_i + a_{n+1,n+1} = 0,$$

когато $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n$ е ненулева реална симетрична матрица.

Опр. $\bar{A} = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n+1$, когато $a_{n+1,i} = a_{i,n+1}$.

Очевидно ако знаем $\bar{A}$ знаем q .

Тв.1 Матриците $\bar{A}$ и $\bar{B}$ задават една и съща фигура от втора степен в $A_n \Leftrightarrow \exists \rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0: \bar{B} = \rho \bar{A}$.

До-во ($\Leftarrow$) очевидно

($\Rightarrow$) пропорционалност (отново разчитаме на конкретни точки)

Ул.1 Ако q - фиг. от 2ра степен в A_n , която се задава с $\bar{A}$, то

$\exists!$ фиг. от втора степен $\bar{q}$ в $P_n: q = \bar{q} \cap A_n$, а именно зададената в хом. коорд. спрямо K с матрица A , т.е.:

$$\bar{q}: -\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0$$

Опр. Казваме, че фигурите от втора степен q и q' са афинно (соотв. метрично) еввивалентни, ако $\exists$ афинна (соотв. метрична) трансф. $L: L(q') = q$.

Тв.2 Афинната (соотв. метричната) еввивалентност е

релация на еквивалентност в множеството на орт. от
втора степен в A_n .

Д. 40 Аналогично на проективния случай

Тв. 3 Ако q и q' са метрично еквивалентни, то те са афинно
еквивалентни.

Опр. Класовете на еквивалентност отн. афинната (метр.)
еквивалентност на фигури от втора степен се наричат
афинни (соотв. метрични) класове.

Тв. 4 Ако $q = \bar{q} \wedge A_n$, $q' = \bar{q}' \wedge A_n$, и q и q' са афинно
еквивалентни, то $\bar{q}$ и $\bar{q}'$ са проективно еквивалентни.

Нека $n=2$. По ал. от утвържденията се доказва теоремата за
метрична класификация на криви от втора степен.

Смислата на орт. коорд. система се интерпретира като метр.
трансформация.

От тази теорема следва ^{афинната} класификация на кривите от втора
степен. Трансформациите обаче са афинни, а не метрични,
защото коорд. система не е ортонормирана. След това се
премахват параметрите (подходящи афинни трансфор-
мации). Например,

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0, a_1^2, a_2^2 > 0 \quad (\text{матрична елипса})$$

← метрично уравнение

$$y_1 = \frac{x_1}{a_1}, \quad y_2 = \frac{x_2}{a_2}$$

← афинно уравнение

$$\Rightarrow y_1^2 + y_2^2 + 1 = 0$$

Аналогично се доказват теоремите за класификация на
криви от втори ред в A_3 .